科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１５５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２７４００１８

研究課題名（和文）可換代数的手法による多様体の三角形分割の面の数え上げの研究

研究課題名（英文）A ring theoretic approach to face numbers of triangulated manifolds

研究代表者
村井　聡（Murai, Satoshi）

山口大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：９０５７０８０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円、（間接経費）　　750,000円

研究成果の概要（和文）：単体的複体や単体的セル複体の面の個数に関する研究は、数え上げ組合せ論における主要な研究課題の一つである。面の個数の研究においては、球面や多様体の三角形分割や単体的セル複体に対し、f-列と呼ばれる情報を調べることが特に重要となる。本研究ではこのテーマに関し、以下の研究成果を得た。（１）球体や球面の直積の単体的セル分割のf-列の特徴付け（２）凸多面体の三角形分割に関する一般下限予想の解決。
特に、（２）はMcMullenとWalkupらによる1971年の予想を解決したものであり、今後の凸多面体の研究に大きな影響を与えることが期待される。

研究成果の概要（英文）：The study of face vectors of simplicial complexes and simplicial cell complexes is a current trend in combinatorics. In particular, face vectors of triangulated spheres and manifolds has been of great interest in this research area. In this research project, we get the following results on this topic. (1) characterizations of face vectors of simplicial cell decompositions of products of spheres and those of balls (2) solution of the generalized lower bound conjecture for simplicial polytopes.
The second result sovles a conjecture of McMullen and Walkup in 1971.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：f-列　単体的複体　単体的セル複体　三角形分割

１．研究開始当初の背景

近年、凸多面体の面の個数の数え上げ理論との関係から、単体分割の組合せ構造に関する研究に注目が集まっている。特に、１９７０年代に MIT の Richard Stanley により、代数的な理論を用いて単体分割の組合せ構造を調べる手法が発見されて以来、代数的なアプローチによる単体分割の組合せ構造の研究が盛んに行われるようになった。

単体分割の研究においては、多様体と呼ばれる幾何学的対象の単体分割を調べることが特に重要である。このような研究は、球面の単体分割の場合に、上記の Stanley の考案した代数的なアプローチが非常に有効であることが知られており、これまで盛んに研究が行われてきた。球面以外の多様体に対してはこの代数的なアプローチは上手くいかないと思われていたが、２００８年にワシントン大学の Isabella Novik とコーネル大学の Edward Swartz は、既存の手法を少し修正することで一般の多様体に対しても球面の単体分割の場合と同様の代数的なアプローチが可能になるという、斬新な結果を発表した。この洞察は全く新しいもので、この手法を発展させることで多様体の単体分割に関する研究が大きく進展することが期待されていた。

２．研究の目的

単体分割の面の個数の研究においては、f-列と呼ばれる情報を調べることが重要となる。本研究の目的は、上記の Novik と Swartz によるアプローチを代数的・組合せ論的な側面からさらに研究し、発展させることで、多様体の単体分割の f-列に関する研究を進展させることである。

図形の単体分割には、三角形分割と呼ばれる概念と、単体的セル分割と呼ばれる概念の、異なる二種類の概念が存在する。この両方に関して、以下のような目標を立て、研究を進めた。

（１）多様体の三角形分割に関する研究の研究目的：

多様体の単体分割の f-列に関する研究において最も重要な問題の一つは、与えられた多様体に対し、その三角形分割および単体的セル分割の f-列の特徴付け（必要十分条件）を与えることである。しかし、三角形分割に関しては、この問題は大変難しい問題であることが知られており、よく研究が進んでいる球面の場合にさえ完全な特徴付けは与えられていない。よって、本研究では、多様体の三角形分割の f-列に関するまだ知られていない新しい必要条件を発見することを目的として研究を進める。特に、ベッチ数と呼ばれる不変量を固定した時に、多様体の三角形分割の f-列の上限・下限を求めることを大きな目標とする。

（２）多様体の単体的セル分割に関する研究目的：

多様体の単体的セル分割の f-列は三角形分割の場合よりも調べ易いことが知られている。実際、三角形分割の場合に未解決問題であった球面の場合の単体分割の f-列の特徴付けは、Stanley と大阪市立大学の枡田幹也教授により数年前に解決されている。本研究では、この Stanley と枡田教授の単体的セル分割の f-列の分類に関する結果を、球面以外の様々な多様体に拡張することを目標とする。

３．研究の方法

Stanley、Novik、Swartz らによって開発されてきた代数的なアプローチをさらに発展させることで研究を進めた。この手法は、スタンレー・ライスナー環と呼ばれる環を考え、そのヒルベルト関数と呼ばれる代数的な不変量を調べる事で、単体分割の f-列に関する情報を得ることができる、という Stanley の洞察に基づいている。本研究では、スタンレー・ライスナー環についての代数的な研究と、単体分割に関する組合せ論的な研究を上手く組み合わせることで、多様体の三角形分割および単体的セル分割に関しそれぞれ以下のような方法で研究を進めた。

（１）多様体の三角形分割に関しては、f-列の満たす新しい必要条件を見つける事が重要となる。そこで、スタンレー・ライスナー環の代数的な性質を調べ、得られた性質を組合せ論的・幾何学的な情報に還元することによって f-列に関する新しい情報を得る、という手法で研究を進めた。

（２）多様体の単体的セル分割に関しては、与えられた f-列を持つ多様体の三角形分割を構成することが重要な問題となる。この構成の為、crystallization と呼ばれる、色付きグラフを用いた単体的セル分割の構成方法を利用した。この手法は、視覚的に捕らえることが難しい高次元の多様体の情報を、平面に描くことができるグラフによって書き出すことで視覚化して捕らえることを可能にするという利点を持っている。

４．研究成果

以下で、本研究において得られた主要な研究成果について詳しく述べる。

（１）球面の直積の単体的セル分割に関する研究成果：

本研究の目的の一つは、様々な多様体に対して、その単体的セル分割の f-列の特徴付けを得ることであった。この研究の第一歩として、二つの球面の直積の単体的セル分割の f-列の特徴付けに関する研究を行い、この場合に f-列の特徴付けを得ることに成功した。
本研究は、球面以外の多様体に対してその単体的セル分割の f-列の特徴付けを得た最初の結果であり、当研究の当初の目論見通り、このような特徴付けが球面以外の場合でも可能であることを示す重要な研究成果となった。

（２）球体の単体的セル分割に関する研究成果：
多様体の単体的セル分割に関する Novik と Swartz の理論は、境界の無い多様体に対しては非常に綺麗な代数的性質を見つけることが出来るが、境界のある多様体については対称性が損なわれ、理論的に扱いが複雑になることが知られている。この為、境界のある多様体の単体分割の f-列に関する研究はこれまであまり進んでいなかった。
今回、境界のある多様体の中で最も簡単な構造を持つ球体の場合に、その単体的セル分割の f-列の特徴付けに関する研究を行い、球体の単体的セル分割の f-列の特徴付けを得ることに成功した。
残念ながら得られた条件式は非常に複雑なものとなったが、境界のある多様体に対しては単体的セル分割の f-列の特徴付けに関する研究はこれまで上手く行っていなかった為、本研究結果は、境界のある多様体の f-列の特徴付けに関する研究の最初の一歩を与える意義深い結果となった。

（３）多面体の三角形分割に関する研究成果：
多面体の三角形分割は単体分割の研究において最も基本的な研究対象の一つである。特に、多面体の三角形分割の研究は多様体の三角形分割の f-列の研究とも深く関連しており、現在多くの研究が進められている。
多面体の三角形分割に関し、1971 年に MucMullen と Walkup は一般下限予想と呼ばれる予想を提唱した。この予想は、単体的な d 次元凸多面体が、d の半分より大きい次元の面のみを加えることで三角形分割できるかどうかは、元の多面体の面の個数にしか依存しないという予想である。
この予想に対し、Ben Gurion 大学の Eran Nevo との共同研究として、スタンレー・ライスナー環を用いた代数的なアプローチによる研究を行い、本予想を解決することに成功した。
この研究成果は、凸多面体の研究において 40 年未解決であった懸案の問題を解決したものであり、今後の凸多面体や三角形分割の研究に大きく貢献するものとなることが期待される。

（４）重心細分の f-列に関する研究成果：
三角形分割を構成するための有用な方法の一つに、正則 CW 複体の重心細分を取る、という方法がある。特に、球面の正則 CW 分割の重心細分の f-列を調べることは、数え上げ組合せ論の分野における Charney-Davis 予想、Gal 予想、Nevo-Petersern 予想と呼ばれる予想と関連する重要な研究テーマである。
今回、Eran Nevo との共同研究として、S*-shellable と呼ばれる特殊な性質をもつ球面の正則 CW 分割の重心細分の f-列に関する研究を行った。球面の正則 CW-分割の重心細分の f-列を研究する際には、γ-列と呼ばれる f-列を少し変形した数列を考えることが有効であることが知られている。今回の研究の研究成果として、S*-shellable な球面の正則 CW-分割の重心細分のγ-列がある単体的複体の f-列になるという事実を証明した。これは、γ-列が非常に強い組合せ論的な条件を満たすことを示す結果である。特に、今回研究を行った正則 CW-分割は、凸多面体の場合を含む非常に広い正則 CW-分割のクラスであり、今回の研究結果は、このような f-列に関する強い条件が一般の球面の CW-分割に対しても成り立つ可能性があることを示唆する興味深い結果となった。

（５）ベロネーゼ環のヒルベルト関数に関する研究結果：
スタンレー・ライスナー環を用いて単体分割の研究をする際には、次数環のヒルベルト関数に関する代数的な情報を得ることが大変重要となる。
今回、Goethe 大学の Martina Kubitzke との共同研究として、次数環のベロネーゼ環のヒルベルト関数に関する研究を行った。ベロネーゼ環は可換代数の分野において良く調べられてきた環であるが、スタンレー・ライスナー環のベロネーゼ環を考えることは三角形分割の edgewise 細分と呼ばれる幾何学的な操作を取ることとも関連し、ベロネーゼ環を代数的に調べることにより単体分割に関する組合せ論的・幾何学的な情報を調べることができる。
本研究の研究成果として、コーエン・マコーレー環に対して十分大きい次数のベロネーゼ環を取ると、レフシェッ性と呼ばれる代数的に良い性質を満たす事を証明した。この結果の系として、十分次数の高いベロネーゼ環のヒルベルト関数について、その h-列が unimodal になる等の大変良い性質を持つという事を発見した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① Satoshi Murai、Face vectors of simplicial cell decompositions of manifolds、Israel Journal of Mathematics、査読有、vol 195、2013、pp. 187-213.
DOI: 10.1007/s11856-012-0127-8

② Satoshi Murai、h-vectors of simplicial cell balls、Transactions of the American Mathematical Society、査読有、 vol 365、2013、pp. 1533-1550.
DOI:10.1090/S0002-9947-2012-05674-1

③ Satoshi Murai、Eran Nevo、 On the generalized lower bound conjecture for polytopes and spheres、 Acta Mathematica、査読有、vol 210、2013、pp. 185-202.
DOI: 10.1007/s11511-013-0093-y

④ Satoshi Murai、Eran Nevo、On the cd-index and γ-vector of S*-shellable CW-spheres、Mathematische Zeitschrift 、査読有、vol 271、2012、pp. 1309-1319.
DOI: 10.1007/s00209-011-0917-4

⑤ Martina Kubitzke、Satoshi Murai、Lefschetz properties and the Veronese Construction、Mathematical Research Letters、査読有、vol 19、2012、pp. 1043-1053.
DOI: 10.4310/MRL.2012.v19.n5.a7

〔学会発表〕（計９件）

① Satoshi Murai、On generalized lower bound conjecture for simplicial polytopes 、Combinatorial Commutative Algebra and Applications、2012 年 12 月 4 日、California(アメリカ).

② Satoshi Murai、Lefschetz properties and face vectors、Aspects of SLP and WLP、2012 年 9 月 13 日、Honolulu（アメリカ）.

③ 村井　聡、3 次元 Gorenstein* order complex の h-列について、2012 年日本数学会年会、2012 年 3 月 26 日、東京理科大学（新宿区）.

④ Satoshi Murai 、 H-vectors of simplicial cell balls 、 The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra、2011 年 12 月 12 日、Quy Nhon（ベトナム）.

⑤ 村井　聡、単体的セル複体の面の数え上げの話、第 56 回代数学シンポジウム、2011 年 8 月 9 日、岡山大学（岡山市）.

⑥ Satoshi Murai 、 Face vectors of simplicial cell decompositions of manifolds 、 Topological and Geometric Combinatorics、 2011 年 2 月 10 日、Oberwolfach（ドイツ）.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
村井　聡（MURAI Satoshi）
山口大学大学院理工学研究科　准教授
研究者番号：90570804

(2)研究分担者

(3)連携研究者