様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５　月　３１　日現在

機関番号：１７３０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：　２２７４００１９
研究課題名（和文）　ゼータ関数の非収束領域における性質を決定する要因

研究課題名（英文）　The origin of analytic properties of zeta functions on the domain where they are divergent

研究代表者
石川　秀明（Ishikawa Hideaki）
長崎大学・教育学部・准教授
研究者番号：90390385

研究成果の概要（和文）：　数列 a(n)を係数とするディリクレ級数で定義されたゼータ関数をF(s)とする。また x 以下の自然数 n 全てにわたっての a(n)の和を A(x)とする。本研究ではF(s)の解析的性質を決める要因を A(x)の誤差項の振動状況の観点から論じた。A(x)の誤差項のm 階不定積分に対する x についての評価が x の多項式オーダーで評価されている時に、そのべき指数をα(m)とする。F(s)が複素平面 C まで有理型関数に解析接続でき、かつ｜F(s)|の上からの多項式オーダーのある評価を仮定した場合、α(m)/m の上極限が 1 より小さいという条件が必要十分であることを証明した。また、A(x)の誤差項の m 階不定積分を周期的ベルヌーイ多項式の一般化と解釈した場合に、どのようなディリクレ級数の特殊値と対応しているのかについての結果も得た。

研究成果の概要（英文）： Let F(s) be a Dirichlet series associated with a sequence a(n). We studied the origin of analytic properties of F(s) from the point of view of an error term coming from sum of a(n).We prove that if m-tuple integrals of the error term are bounded by functions having mild orders, then F(s) can be continued analytically over the whole plane and satisfy a certain additional assumption. The converse assertion is also proved. We also study a relation between values of the m-tuple integrals of the error term and special values of a certain Dirichlet series.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	500,000	150,000	6,500,000
2011 年度	500,000	150,000	6,500,000
2012 年度	500,000	150,000	6,500,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：数論、　ディリクレ級数、ゼータ関数、解析接続、係数和の評価

１．　研究開始当初の背景

研究計画の要約　数列 a(n)を考えたとき、その平均

$$A(x)=\sum_{n\le x}a(n)$$

の挙動と

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$$

で定義される複素数 s の関数の解析的性質は密接に関係する。F(s)をディリクレ級数で定義されたゼータ関数とよぶ。ゼータ関数 F(s)が収束軸を超え、ある領域に解析接続できた時、その領域で F(s)が獲得する性質を知ることは重要である。 F(s)が関数等式をもつ場合には多くの研究が進んでいる一方で、関数等式をもたない F(s)の統一的理論は未だ無い。本研究では、F(s)に関数等式を仮定せず、それよりも弱い解析的条件を与える。その条件に対し A(x)の観点からの必要十分条件を求める。与える F(s)の条件を変えた時、対応する A(x)の必要十分条件がどのように変わるのか調べ、F(s)の非収束領域での性質を決める要因を A(x)の観点から明らかにすることが本研究の大きな目標である。

計画立案時の背景　まずは、研究開始当初の背景について述べたい。

当時、神谷論一氏（現、大東文化大学経済学部講師）が取り組んでいた F(s)の概周期性の研究は関数等式を仮定しない F(s)の解析的性質を統一的に調べるものであり、大変興味深いものであった。Bohr が発展させた概周期関数の理論を、Beurling がスペクトル集合という視点からさらなる発展を促した。代表者は 2006 年秋頃に、神谷氏からスペクトル決定に適した F(s)の表示式を求めることは出来るか否か質問を受ける。そこで、代表者はまずオイラーマックローリン和公式を一般化し、その応用として F(s)の新しい表示式を得た。そして、その表示式を用い F(s)のスペクトルを任意の領域において決定した。この結果により F(s)のスペクトル集合については、関数等式と独立に論じることができることが明らかになった。このことは大変興味深いことであると思う。その後の本計画立案の動機につながるという点でも特筆すべきことといえよう。この結果は神谷氏が同時期に得た超関数を援用してスペクトルを決定する結果と併せ、共著論文にまとめ発表している（H. Ishikawa and Y. Kamiya, Spectral sets of certain functions associated with Dirichlet series, J. Math. Anal. Appl., 347 (2008), p204-223)。概周期性の研究において証明した F(s)の表示式は、スペクトル集合の決定以外にも威力を発揮すると予感できるものであった。そこで、概周期の研究から一旦離れ F(s)の表示式そのものの精査に取り掛かった。そこで判明したことは、代表者が証明した表示式は、関数等式を仮定しない F(s)の解析的性質と対応する A(x)の誤差関数の振動状況とを結びつける有効な式だという事実である。

以下に、F(s)の関数等式についての周辺事情を説明する。全ての自然数 n に対し a(n)=1 のとき、F(s)はリーマンゼータ関数ζ(s)である。ζ(s)は収束軸を超えて解析接続でき、複素平面Ｃで有理型な関数となる。さらには、s と 1 － s での値が、ガンマ関数などの補助関数を経由して、ある等式で結びつく「関数等式」を持つ。関数等式をもつゼータ関数たちの性質を明らかにする試みは Hamburger 、Hecke、Bochner、Berndt，他多くの数学者によって花開いた。関数等式をもつ F(s)の場合、

対応する A(x)の挙動の問題はかなり詳細なことがわかる。A(x)の主要項はF(s)の極の留数とF(0)の値から生じる。この主要項をA(x)から引き去り、残った部分を誤差関数と呼ぶことにする。一般には誤差関数の挙動は不規則極まりない。しかし、ある程度の規則に従い振動具合が統制されている場合、応じてF(s)は関数等式をもつ。この「ある程度の規則」とは、誤差関数がボロノーイ公式（ベッセル関数を用いた無限級数表示）を持つ状態という形で定式化されている。また逆に関数等式をもつ F(s)ならば、対応する A(x)の誤差関数はボロノーイ公式をもつことも証明されている。

一方で関数等式を持つのか否かが不明なゼータ関数も多数存在する。本研究ではこのタイプのゼータ関数を対象にしている。関数等式という強烈な性質までは持っていないが、幾つかの解析的性質は備えているという状況を想定する。対応する A(x)の誤差関数はボロノーイ公式をもたず、より不規則な状況となる。このような関数等式を仮定しないゼータ関数と対応する A(x)の場合、その研究は個々の場合に散発的に行われてきた感は否めない。

立案当初に得られていた結果　x の関数 g(x,m)の不定積分を g(x,m+1)とする。ここで m は非負整数である。このとき関数列 g(x,m) m=0,1,2,3,…に対し各 g(x,m)の x についての評価を考えたとき|g(x,m)|が x のべき乗の定数倍以下になる事がいえたとする。この時のべき指数をα(m)とする。計画立案の当初は「A(x)から主要項を引いた誤差項を g(x,0)としたときに、m＋１－α(m) →∞（m→∞)、ならばF(s)は複素平面Ｃに有理型関数として解析接続できる」と「複素平面Ｃに有理型関数として解析接続でき、加えて|F(s)|のある評価を仮定するならば、m＋１－α(m) →∞（m→∞)」について証明ができていた。そのことは 2008 年京都での研究集会において発表した。

このような背景のもとで、代表者は関数等式を仮定しない F(s)を、その解析的性質にもとづき分類し、その特徴づけを A(x)の挙動の観点から行おうと考え本計画を立案した。

２．研究の目的

ゼータ関数 $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ が収束軸を超え、ある領域に解析接続できた時、その領域で F(s)が獲得する性質に注目してみる。本研究では、F(s)に関数等式を仮定せず、それよりも弱い解析的条件を与える。その条件に対し A(x)の観点からの必要十分条件を求めたい。与える F(s)の条件を変えた時、対応する A(x)の必要十分条件がどのように変わるのかを調べることで、F(s)の非収束領域での性質を決める要因を A(x)の観点から明らかにしていくことが本計画の目指すところである。

整数論においては、関数等式ほどの強い条件を要請しない問題もあれば、関数等式の存在自体が不明な F(s)を扱う問題もある。代表者が概周期性の研究過程で得た F(s)の表示式は、関数等式を仮定しない状況下で F(s)とA(x)の相互関係の研究が進展する可能性を秘めている。関数等式を仮定しないゼータ関数を統一的に扱う理論を進展させることが最終的な目的である。そして、その結果として、これまで散発的に扱われてきた多くの問題を鳥瞰し、新たな解釈を与えることも視野に入れている。

３．研究の方法

研究目的を達成するために、具体的には次のようなテーマを設定し証明する。

（テーマ１）ゼータ関数 F(s)が複素平面Ｃに有理型関数として解析接続できることと、その領域での|F(s)|のある評価を仮定する。このことと同値な命題を、A(x)の誤差関数の振動状況の観点から述べる。また、|F(s)|に仮定する評価の条件を様々に変えた場合にも、同様に A(x)の観点からの必要十分条件を求める。

（テーマ２）非正整数値における値 F(-n)の性質を調べ、リーマンゼータ関数のζ(-n)において成立する結果の類似物を証明する。その類似物が成立するための条件を A(x)の観点から述べる。

これらのテーマで成果をあげるための研究方法として、

・代表者が概周期関数の研究過程で証明した F(s)の表示式を利用する
・一般化したオイラーマックローリン和公式の再検証
・ある関数をもとに作られる不定積分たちによる関数列の性質の考察
・メリンバーンズ積分表示を利用したディリクレ級数の表示と、そこから引き出される諸事実の検証

を考えている。また、これらに加えて、これまで身に着けた解析接続の知識、技法を駆使し、計画を達成したい。

４．研究成果

得られた結果　計画当初は既に「A(x)から主要項を引いた誤差項を g(x,0)としたときに、ｍ＋１－α(m) →∞（m→∞）、ならば F(s)は全平面に解析接続できる」と「全平面に解析接続でき、加えて|F(s)|のある評価を仮定するならば、ｍ＋１－α(m) →∞（m→∞)」について証明ができていた。そこで２２、２３年度は、この結果についてさらに精査し、そのような関数列 g(x,m)の存在が言えた場合に一意に確定することを証明できた（これは神谷諭一氏との共同研究の結果である)。これは当初予想していなかった事柄であり、大変興味深い現象に思える。これらの成果は論文として、雑誌 Publications de l’Institut Mathematique に掲載された。

計画実行当初に注目していたｍ＋１－α(m)→∞（m→∞）という条件はディリクレ級数が複素平面Ｃまで有理型関数に解析接続できるための基準となるものである。しかし考察の過程でα(m)/mの上極限の観点から論じるほうが、本質をより鮮明に記述するのではないかと思い始めた。２３年度から２４年度にかけてはα(m)/mの上極限に注目した命題を設定し、次のような結果を証明した：

結果１　F(s)が複素平面Ｃまで有理型関数に解析接続できて、かつ解析接続できた半平面において $|F(\sigma+it)|\le C(1+|t|)^{-K\sigma+L}$ ここでC、K，Ｌはある定数、なる評価をもつことと、α(m)/m の上極限が 1 より小さいということが必要十分条件である。

必要十分条件として記述できたことで、その解析的性質を満たす F(s)の属するクラスを特徴づけることができたといえる。

また、リーマンゼータ関数の非正整数値での特殊値はベルヌーイ数を用いて表すことができるというよく知られた事実がある。この一般化にあたるものを考え、次のような結果を証明した：

結果２　A(x)の誤差関数 g(x,0)の m 階不定積分 g(x,m) を周期的ベルヌーイ多項式の類似ととらえた場合に、F(s)に少し手を加えた新たなディリクレ級数の非正整数値

での特殊値と関連付けることができる。ここで得られた関係式は、リーマンゼータ関数の非正整数値での値とベルヌーイ数との関係式を包含するものとなっている。

結果２については、当初はF(s)の特殊値と関連すると予想していたのだが、実際に証明をしてみると予想とは異なり、他のゼータ関数と関連しているのであった。

　これらの成果は2012年秋に行われた京都大学数理解析研究所での研究集会で発表した。現在、論文投稿作業の準備にも入っている。

将来の展望　現在は、｜F(s)｜の評価についての条件を少しずつ弱めていった場合を考察している。この計画の先には、自然境界をもつようなゼータ関数のクラスについての研究も見据えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

石川秀明、　神谷諭一、　On a relation between sums of arithmetical functions and Dirichlet series　Publications de l'Institut Mathematique Beograd. 92 (106), p97-108. 2012 年、査読有り

〔学会発表〕（計　１件）

石川秀明、　On some properties of Dirichlet series on a domain where it is divergent、解析的整数論とその周辺 --- 近似と漸近的手 法を通して見る数論, ２０１２年10月２９－３１、京都大学数理解析研究所

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

石川　秀明（Ishikawa Hideaki）
長崎大学　教育学部　准教授
研究者番号：90390385

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：