

平成 26 年 7 月 31 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740021

研究課題名(和文) 保型形式の周期と調和解析

研究課題名(英文) Periods of automorphic forms and harmonic analysis

研究代表者

市野 篤史 (Ichino, Atsushi)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40347480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、特殊直交群やユニタリ群上の保型形式の周期と、保型L関数の特殊値の関係に関する、大域的(Gan-)Gross-Prasad予想の研究を行った。特に、相対跡公式への応用を目指し、収束するとは限らない周期を正則化する理論の拡張を、(Gan-)Gross-Prasad予想に現れる周期の場合に行った。また、保型形式の周期の局所類似として、局所体上の簡約群の調和解析と、数論的不変量の関係の研究を行った。特に、形式次数と随伴因子の特殊値を結びつける形式次数予想が、局所テータ対応が定める関手リフトと整合的であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have studied the global (Gan-)Gross-Prasad conjecture on the relation between periods of automorphic forms on special orthogonal and unitary groups and special values of automorphic L-functions. In particular, toward an application to relative trace formulas, we extended a theory of regularized periods which are not necessarily convergent to those appearing in the (Gan-)Gross-Prasad conjecture. Also, as a local analogue of periods of automorphic forms, we have studied the relation between the harmonic analysis on reductive groups over local fields and arithmetic invariants. In particular, we proved that the formal degree conjecture, which relates the formal degrees of square-integrable representations with special values of adjoint gamma-factors, is compatible with the functorial lift defined by the local theta correspondence.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式 周期 形式次数 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

2002年頃から池田保と共同で、特殊直交群上の保型形式の周期と保型L関数の特殊値の係数に関する、大域的 Gross-Prasad 予想の研究を行っており、2005年には周期とL関数の特殊値の間の明示等式を予想として提出していた。また、その局所類似として、平賀郁・池田保と共同で、形式次数と随伴因子の特殊値を精密に結びつける予想(形式次数予想)を2005年頃に提出した。その一方で、本研究を開始した2010年の段階でも、これらの二つの予想に関して知られていることはそれほど多くなく、予想のさらなる検証が求められていた。

2. 研究の目的

本研究の具体的な目的は、大域的な(Gan-)Gross-Prasad 予想の明示公式の予想、局所的な形式次数予想、の二つの予想に関して、さらに実例を与え、他の理論との整合性を確かめ、予想を検証することにある。この具体的な研究を通して、周期等の表現論的な不変量と、L関数の特殊値等の数論的不変量の間に関する関係について、さらに一般化・精密化・新しい定式化を行い、深い知見を得ることが、本研究の最終的な目標であった。

3. 研究の方法

ユニタリ群に対する、大域的な(Gan-)Gross-Prasad 予想の明示公式に関しては、研究手法として Jacquet-Rallis による相対跡公式を用いる方法がある。この相対跡公式を単純化することで、Wei Zhang は予想を多くの場合に解決した。一方、単純化を施したため、エンドスコピーに起因する数論的不変量が発生する場合を取り扱うことができない。これを解消するためには、相対跡公式を完全に証明する必要がある。そのために、収束するとは限らない周期を正則化する理論の拡張が生じた。この研究は、山名俊介と共同で行った。

形式次数予想に関しては、一般の古典群に対しては予想を証明する手法・枠組みの見当がつかいにくいため、他の理論との整合性を確認することに絞って、研究を行った。特に、関手リフトの一種である局所テータ対応に着目した。これには大域的には Rallis 内積公式などの先行結果が既に多く存在したため、その局所的類似を追求することで、形式次数予想との整合性を証明することができた。この研究は、Wee Teck Gan と共同で行った。

4. 研究成果

山名俊介との共同研究において、(Gan-)Gross-Prasad 予想に現れる、一般線形群・ユニタリ群上の保型形式の周期に対し、その正則化の理論を拡張した。この理論はガロア対の場合には Jacquet-Lapid-Rogawski によって得られていたが、本研究で扱った場合は対称対で構わない。一般線形群に対しては、Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika によるカスプ形式に対する積分表示の理論を、一般の保型形式に対して拡張したことに相当する。この研究成果は、Jacquet-Rallis による相対跡公式への応用を持つと考えられる。

Nicolas Templier との共同研究において、Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika の積分表示が、Voronoi 公式への簡明な応用を持つことがわかった。特に、一般の数体に対し、保型カスプ形式のフーリエ係数の加法指標による重み付きの和と、その双対カスプ形式のフーリエ係数の Kloosterman 和による重み付きの和の間の公式を証明した。

Wee Teck Gan との共同研究において、局所テータ対応による形式次数の挙動が、形式次数予想から予期されているものと一致することを証明した。局所テータ対応を具体的に実現し、大域的な Rallis 内積公式の局所類似を追求することで、証明に成功した。局所テータ対応の実現は、Jian-Shu Li による構成を安定領域の外へ拡張したことに相当し、Weil 表現の行列係数を核関数とする積分作用素により、離散系列表現の行列係数を変換することによって得られる。また、表現論的な議論を多用するため、最終的な公式に現れる比例定数の特定には困難が生じたが、特別な離散系列表現に対して、その形式次数を直接計算することで、この比例定数を決定した。

平賀郁との共同研究において、 $GL(n)$ の保型誘導に対する指標関係式に現れる、比例定数を同定した。この比例定数は表現によらず、また群が基礎体上不分岐の場合は1であることが、既に Henniart-Lemaire によって知られていた。指標関係式に用いる transfer factor を、Kottwitz-Shelstad に従ってイプシロン因子を用いて正規化することで、群が基礎体上分岐する場合でも、比例定数は1になることを、大域的な手法と局所的な計算を組み合わせることで証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, Invent. Math. 195 (2014), no. 3, 509-672. 査読有

Atsushi Ichino, Nicolas Templier, On the Voronoi formula for $GL(n)$, Amer. J. Math. 135 (2013), no. 1, 65-101. 査読有

Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino, On the Kottwitz-Shelstad normalization of transfer factors for automorphic induction for GL_n , Nagoya Math. J. 208 (2012), 97-144. 査読有

Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, On endoscopy and the refined Gross-Prasad conjecture for (SO_5, SO_4) , J. Inst. Math. Jussieu 10 (2011), no. 2, 235-324. 査読有

Atsushi Ichino, Tamotsu Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture. Geom. Funct. Anal. 19 (2010), no. 5, 1378-1425. 査読有

[学会発表](計28件)

Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Arithmetic & Dynamics, 2014年1月10日, The Israel Institute for Advanced Studies, The Hebrew University of Jerusalem

Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, The Fourth Conference of Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, 2013年12月20日, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum

Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Geometry, Number Theory and Representation Theory, 2013年12月6日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon

Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, 2013年度表現論シンポジウム, 2013年11月29日, 三浦

Atsushi Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Group Theory/Lie Theory/Number Theory Seminar, 2013年10月28日, University of Michigan

Atsushi Ichino, Periods of automorphic forms: the case of $(GL_{n+1} \times GL_n, GL_n)$, Number Theory Day, 2013年9月11日, National University of Singapore

Atsushi Ichino, 奇数次特殊直交群の二乗可積分表現の形式次数について, 数論合同セミナー, 2013年7月19日, 京都大学

Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, 2013年3月28日, Morningside Center of Mathematics

Atsushi Ichino, 保型表現と周期, 2013年度(第16回)代数学賞受賞特別講演, 日本数学会2013年度年会, 2013年3月22日, 京都大学

Atsushi Ichino, Regularized periods of automorphic forms, Princeton University/IAS Number Theory Seminar, 2013年2月14日, Princeton University

Atsushi Ichino, Regularized periods of automorphic forms, Columbia-CUNY-NYU joint number theory seminar, 2013年2月7日, Columbia University

Atsushi Ichino, Periods of automorphic forms: the case of $(GL_{n+1} \times GL_n, GL_n)$, 数理解析研究所研究集会「保型表現とその周辺」, 2013年1月21日, 京都大学

Atsushi Ichino, 表現論と数論的不変量, 談話会, 2012年6月13日, 京都大学

Atsushi Ichino, Formal degrees and adjoint gamma factors (continued), Branching Laws, 2012年3月29日, National University of Singapore

Atsushi Ichino, Periods of quaternionic Shimura varieties, International

Colloquium on Automorphic representations and L-functions, 2012 年 1 月 7 日, Tata Institute of Fundamental Research

Atsushi Ichino, 形式次数とテータ対応, 2011 年度表現論シンポジウム, 2011 年 11 月 8 日, みなべ

Atsushi Ichino, 形式次数とテータ対応, 表現論セミナー, 2011 年 10 月 21 日, 京都大学

Atsushi Ichino, Local Theta Correspondence for $(\mathrm{Mp}(2n), \mathrm{SO}(2n+1))$, Theta Festival, 2011 年 8 月 15 日-18 日, POSTECH

Atsushi Ichino, 形式次数とテータ対応, 代数学セミナー, 2011 年 7 月 15 日, 九州大学

Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, L-packets, 2011 年 6 月 30 日, Banff International Research Station

- 21 Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, Jerusalem Number Theory Seminar, 2011 年 5 月 26 日, Hebrew University of Jerusalem
- 22 Atsushi Ichino, 表現論と数論的不変量, 代数学セミナー, 2011 年 4 月 22 日, 広島大学
- 23 Atsushi Ichino, 形式次数とテータ対応, ワークショップ「表現論とその関連分野」, 2011 年 3 月 15 日, 北海道大学
- 24 Atsushi Ichino, Representation theory and arithmetic invariants, Colloquium, 2011 年 2 月 9 日, National University of Singapore
- 25 Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, Workshop on Geometry and Representation Theory, 2011 年 1 月 26 日, National University of Singapore
- 26 Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, The second PANT (PanAsian Number Theory) Conference, 2010 年 9 月 14 日, 京都大学数理解析研究所
- 27 Atsushi Ichino, Formal degrees and local theta correspondence, Automorphic Forms and Number

Theory, ICM Satellite Conference, 2010 年 8 月 17 日 International Centre, Goa

- 28 Atsushi Ichino, On the Kottwitz-Shelstad normalization of the transfer factor for automorphic induction of $\mathrm{GL}(n)$, Workshop on Arithmetic Geometry and Related Topics, 2010 年 7 月 12 日, National Taiwan University

〔その他〕

ホームページ

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichino/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

市野 篤史 (ICHINO, Atsushi)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 40347480