

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 4 日現在

機関番号：32682

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22740026

研究課題名（和文）ヒルベルト函数による可換環論

研究課題名（英文） Research on the Hilbert functions in commutative algebra

研究代表者

大関 一秀（OZEKI KAZUHO）

明治大学・研究・知財戦略機構・ポスト・ドクター

研究者番号：70445849

研究成果の概要（和文）：研究代表者の研究成果の一部を紹介する。

1. m -準素イデアルの第1ヒルベルト係数の挙動研究

ネーター局所環 (A, m) 内に於ける m -準素イデアルの第1ヒルベルト係数には、イデアルのヒルベルト函数の挙動、随伴次数環の構造といった主要な情報が内包されている。本研究では、J. EliasとG. Vallaによって与えられた第1ヒルベルト係数に関連する等式を用いて、非コーエンマコーレイ環内に於ける m -準素イデアルの特徴付けを行った。FLCを持つ環内に於いてElias-Vallaの等式を満たす m -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動や随伴次数環の局所コホモロジー加群の構造を決定し、その上で、基礎環がブックスバウム環であれば、Elias-Vallaの等式を満たす m -準素イデアルの随伴次数環もブックスバウム環をなすことを示している。

2. 巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動研究

巴系イデアルのヒルベルト係数の挙動には、それを含む局所環の環構造がかなり含まれていると考えられる。本研究では、局所環が FLC を持つことと局所環内の任意の巴系イデアルのヒルベルト係数の値が有限であることが同値であることを示した。さらに、FLC を持つ環内に於いて、巴系イデアルの各ヒルベルト係数の無駄のない境界値の解明にも取り組み、第2ヒルベルト係数について無駄のない上限値とその上限値をとる巴系イデアルの特徴付けを与えている。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to explore the behavior of the Hilbert functions of m -primary ideals in a commutative Noetherian local ring A with the maximal ideal m . The representative of this research gave the following results.

1. Research on the first Hilbert coefficients of m -primary ideals

The purpose of this research is to study the equality on the first Hilbert coefficients of m -primary ideals given in Elias and Valla, without assuming that the base local ring (A, m) is Cohen-Macaulay. It is related to the Buchsbaumness of the associated graded ring of m -primary ideals.

2. Research on the Hilbert coefficients of parameter ideals

This research shows that the Hilbert coefficients of parameter ideals have uniform bounds if and only if the base local ring A has finitely generated local cohomology modules. The uniform bounds are huge; the sharp bound for the second Hilbert coefficient in the case where the base local ring has finitely generated local cohomology modules.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,000,000	300,000	1,300,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数物系科学

キーワード：可換環論，ヒルベルト函数，ヒルベルト係数，コーエンマコーレイ環，ブックスバウム環，FLC を持つ環

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は研究開始時に、ネーター局所環内の巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動研究に従事し、巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の挙動による局所環の構造解明について成果を挙げていた。一方で、巴系イデアルの第 2 番目以降のヒルベルト係数については未知であり、その構造解析が必要であると考えられていた。

巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動を追う際に、巴系イデアルの特殊性が顕著に表れることがある。従って、巴系イデアルの場合とは別に、局所環 (A, \mathfrak{m}) 内に於ける一般の \mathfrak{m} -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動解析を行うことが必要であると考えられる。近年では、G. Valla や M. E. Rossi を中心に \mathfrak{m} -準素イデアルの第 1 ヒルベルト係数による随伴次数環の構造研究が盛んに行われている。

2. 研究の目的

本研究は、イデアルのヒルベルト函数の挙動研究に関して、研究代表者により得られた知見を武器に同研究に参入し、さらに発展した可換環論を展開することを目的とする。その中で、主に、巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動による局所環の構造解明と、第 1 ヒルベルト係数による \mathfrak{m} -準素イデアルの随伴次数環の構造の分類を行う。

3. 研究の方法

巴系イデアルの有限性問題に着手する際に、随伴次数環の Castelnuovo-Mumford regularity の理論を用いた。しかしながら、この手法で得られる境界は単に有限性を示しているのみに過ぎず実用的には殆ど意味を持たない。そこで、Serre 公式を用

いながら各ヒルベルト係数の値を随伴次数環の局所コホモロジー量として表わし、それらの大きさを精密に解析することにより、各ヒルベルト係数の無駄のない境界を求めることが可能となる。

\mathfrak{m} -準素イデアルの第 1 ヒルベルト係数の解析を行う際に、V. W. Vasconcelos によって提唱された Sally 加群の理論が有効であるとされている。非-コーエンマコーレイ環内に於ける Sally 加群の理論を構築しながら、第 1 ヒルベルト係数による \mathfrak{m} -準素イデアルの随伴次数環の構造の分類を行う。

4. 研究成果

局所環内の任意の巴系イデアルのヒルベルト係数の値が有限であることと、局所環が FLC を持つことが同値であることを示した。さらに、FLC を持つ環内に於ける第 2 ヒルベルト係数の無駄のない上限値とその上限値をとる巴系イデアルの特徴付けを与えた。これらの研究成果については、「The 32nd Symposium and The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra」, 「日本数学会 2010 年度秋季分科会」, 「第 44 回環論及び表現論シンポジウム」にて口頭発表を行い、学術論文「Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters」として公表している。

非コーエンマコーレイ環内に於いて Elias-Valla の等式を満たす \mathfrak{m} -準素イデアルの構造解析を行った。Sally 加群と随伴次数環の構造の関係解明に有効であると考えられていた A. Corso, C. Polini, W. V. Vasconcelos による手法を改良し、非コーエンマコーレイ環内に於ける Sally 加群の理論を用いることで、Elias-Valla の等式

を満たす m -準素イデアルのヒルベルト関数の挙動, 随伴次数環の局所コホモロジー加群の構造を全て取り出すことに成功した。それらを用いることで, ブックスバウム環内にて Elias-Valla の等式を満たす m -準素イデアルの随伴次数環はブックスバウム環であることを示した。これらの研究成果は, 「第 33 回可換環論シンポジウム」, 「The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra」, 「日本数学会 2011 年度秋季分科会及び年会」にて口頭発表を行った。さらに, その内容を 2 編の学術論文「The equality of Elias-Valla and the associated graded ring of maximal ideals」, 「The structure of Sally modules and Buchsbaumness of associated graded rings」 として公表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

[1] Kazuho Ozeki, The equality of Elias-Valla and the associated graded ring of maximal ideals, J. Pure and Applied Algebra Vol. 216, pp.1306-1317, 2012.

[2] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Variation of the first Hilbert coefficients of parameters with a common integral closure, J. Pure and Applied Algebra Vol. 216, pp. 216-232, 2012.

[3] Kazuho Ozeki, The structure of Sally modules and Buchsbaumness of associated graded rings, MIMS Technical Report NO.00034, pp. 1-35, 2011.

[4] Shiro Goto and Kazuho Ozeki, Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters, Contemporary Mathematics, Vol. 555, pp. 97-118, 2011.

[5] Shiro Goto and Kazuho Ozeki, Buchsba

umness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters, Nagoya Math. J., Vol.199, pp. 95-105, 2010.

[6] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals, London Math. Soc., Vol. 81, pp.679-695, 2010.

[7] Shiro Goto and Kazuho Ozeki, The structure of Sally modules -towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases -, J. Algebra, Vol. 324, pp.2129-2165, 2010.

[学会発表] (計 12 件)

[1] 後藤四郎, 大関一秀, 高橋亮, Ulrich 加群の一般化について, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学理学部 (東京), 2012 年 3 月.

[2] 後藤四郎, 大関一秀, 高橋亮, Ulrich イデアルの極小自由分解について, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学理学部 (東京), 2012 年 3 月.

[3] Kazuho Ozeki, The structure of Sally modules and Buchsbaumness of associated graded rings, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra Quy Nhon University (Vietnam), 2011 年 12 月.

[4] Kazuho Ozeki, The equality of Elias and Valla and Buchsbaumness of associated graded rings, 第 33 回可換環論シンポジウム, カリアック浜松 (静岡), 2011 年 11 月.

[5] Shiro Goto, Ryo Takahashi, and Kazuho Ozeki, On Ulrich modules -a generalization, 第 33 回可換環論シンポジウム, カリアック浜松 (静岡), 2011 年 11 月.

[6] 大関一秀, Elias-Valla の等式と随伴次数環の構造について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 信州大学理学部 (松本), 2011 年 9 月.

[7] Kazuho Ozeki, Sharp bounds for Hilbert coefficients of parameters, 第 44 回環論及び表現論シンポジウム, 岡山大学理学部 (岡山), 2011 年 9 月.

[8] Kazuho Ozeki, Hilbert coefficients of parameter ideals, The Sixth China- Japan-Korea International Conference on Ring and Module Theory Kyung Hee Univ. (Korea), 2011 年 7 月.

[9] 大関一秀, 第 1 ヒルベルト係数と随伴次数環の Buchsbaum 性について, 日本数学会 2011 年度年会, 早稲田大学理工学部 (東京), 2011 年 3 月.

[10] Shiro Goto and Kazuho Ozeki, Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters, The 32nd Symposium and The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, IPC 生産性国際交流センター (神奈川), 2010 年 12 月.

[11] 後藤四郎, 大関一秀, 巴系イデアルのヒルベルト函数の一様な境界について, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 名古屋大学東

山キャンパス (名古屋), 2010 年 9 月.

[12] Kazuho Ozeki, The first Hilbert coefficients of parameters, 第 43 回環論及び表現論シンポジウム, 鳴門教育大学 (徳島), 2010 年 9 月.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大関 一秀 (OZEKI KAZUHO)

明治大学・研究・知財戦略機構・ポスト・ドクター

研究者番号 : 70445849