

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月5日現在

機関番号：57701

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22740027

研究課題名（和文） 局所環上の巴系加群の重複度の基礎理論構築

研究課題名（英文） A basic theory of the multiplicity of parameter modules over a local ring

研究代表者

早坂 太（HAYASAKA FUTOSHI）

鹿児島工業高等専門学校・一般教育数理系・講師

研究者番号：20409460

研究成果の概要（和文）：可換環論の立場から、局所環上の巴系加群の重複度の理論を整備し、イデアルの場合と比べ、技術的に困難な部分を明らかにした。また、標準的とは限らない多重次数付き環拡大の斉次成分に付随する不変量の漸近的性質について調べ、深さと随伴素イデアルが、ある錐内において周期的な振る舞いをすることを証明した。

研究成果の概要（英文）：We studied a basic theory of the multiplicity of parameter modules over a local ring, and clarified where the parts of the technical difficulty of the study, compared with the case of ideals, are. We also investigated the asymptotic property of the grade and the set of primes associated to homogeneous components of a nonstandard multigraded ring extension, and proved that the asymptotic periodicity occurs in a cone.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,000,000	300,000	1,300,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：局所環、巴系加群、重複度、ボックスバウム・リム重複度、ボックスバウム・リム関数、多重次数付き環

1. 研究開始当初の背景

(1) 局所環の重複度研究は、Chevalley に始まり、1950年代初頭に Samuel や永田らの研究で、イデアル論による基礎理論が完成した。

1954年、Northcott-Rees はイデアルの節減の概念を導入し、一般のイデアルの重複度研究が、ある意味で巴系イデアルの重複度研究に帰着されることを示した。1950年代後半に

は、Serre、Auslander–Buchsbaum によって「巴系イデアルの重複度が Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数で表される」という著しい結果が独立に証明された。1964 年、Buchsbaum–Rim は、この定理の拡張を試み、イデアルの重複度の拡張概念である加群の重複度の概念を得た。これを、ブックスバウム・リム重複度と呼ぶ。

(2) イデアルの重複度が、Samuel、永田らによってイデアル論による基礎付けがなされて以来、これまで多くの研究者によって詳しい解析が行われているのに対し、その拡張概念であるブックスバウム・リム重複度の研究が本格的に開始されたのは比較的最近である。1985 年、Kirby は、Serre の定理の一般化である Buchsbaum–Rim の定理の見直しを行い、一般化された Koszul 複体のオイラー標数の理論へと拡張した。1990 年代に入ると、Kleiman–Thorup、Gaffney らによって代数幾何学・特異点論の立場からブックスバウム・リム重複度の研究が行われた。

(3) ブックスバウム・リム重複度の概念がイデアルから加群への形式的な拡張でなく、幾何学的にも重要な概念であることが明らかになってくるに従い、可換環論の立場からの研究が再開された。Kirby–Rees は、ブックスバウム・リム重複度を含む形の一般的な状況で代数的な重複度理論を展開した。現在、可換環論の立場からの研究は、Ulrich、Vasconcelos たちを中心に行われている。しかしながら、イデアルの場合のそれと比べると、基本的な事柄すらわかっていないというのが実状である。

2. 研究の目的

このような状況を踏まえ、本研究課題では、可換環論の立場から、加群のブックスバウム・リム重複度の基礎理論構築を行うことを目的とする。

(1) イデアルの重複度の研究において、随伴

次数環の存在と、上表元と呼ばれる特別な元を用いた次元に関する帰納法が技術的に大きな役割を果たしている。しかしながら、加群のブックスバウム・リム重複度研究においては、これに相当する良い概念が未だ見つかっていない。この点が、これまでのイデアルの重複度研究と比べ、加群のブックスバウム・リム重複度研究が思う様に進んでいない最大の要因と思われる。そこで、本研究課題では、これまでのイデアルの重複度研究における手法とは異なり、よりホモロジカルな手法に基礎をおき、先行するイデアルの場合の類似を考察しながら、加群の重複度の基礎理論構築を目指す。

(2) Kirby、Buchsbaum–Eisenbud によって導入された一般化された Koszul 複体とそのオイラー標数に着目し、イデアル論に特有の技術を用いない、よりホモロジカルな議論を基礎にした新しい研究手法を開発したい。イデアルの場合と異なり、加群の重複度研究を技術的に困難にしている部分を明らかにしながら、加群の重複度研究に有効な技術と基礎理論を構築する。

(3) 具体的には、次の課題解決を目指す。

課題①: ブックスバウム局所環上の巴系加群の colength とブックスバウム・リム重複度の差は、加群の階数ごとに一定か?

ブックスバウム局所環と呼ばれる環のクラスにおいては、巴系イデアルの colength と重複度の差は一定（環の不変量）であることが知られている。上記課題は、この事実の類似（加群版）である。

3. 研究の方法

(1) 私はこれまでに、Eero Hyry 氏との共同研究で、ブックスバウム・リム重複度に関していくつかの成果を得ている。巴系イデアルの拡張概念である局所環上の巴系加群の重複度と colength の間の関係を調べ、巴系イ

デアルの場合と類似の不等式を証明した。ここでは、一般化された Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数が本質的な役割を果たしていた。一般化された Koszul 複体は、Kirby、Buchsbaum-Eisenbud によって 1970 年代に独立に構成されて以来、Kirby による一連の論文以外に体系的な研究は見当たらない。そこで、課題①解決を念頭に、Kirby の研究の見直しを行い、より現代的な視点から理論を整理する。

(2) Kirby-Rees、Kleiman-Thorup の論文など加群のブックスバウム・リム重複度に関する先行する結果について調査を行う。また、イデアルの重複度についても、古典的な結果の見直しに加え、最近の結果について調査を行う。イデアルの場合の証明法が加群の場合にそのまま適用できない原因を明らかにする。

(3) 課題①解決のためには、多くの具体例による裏付けが必要である。具体的なブックスバウム局所環上の巴系加群の重複度と colength の計算を行う。加群の重複度計算は、イデアルの場合のそれと比べ、多くの困難を伴う。イデアルの場合に扱っていた列の部分が一般の行列となり、1 変数多項式の部分が多変数多項式へと拡張されることで計算量が大幅に増える。計算機を使った代数計算が有効となることを想定して、必要な計算機環境を整備する。

(4) ブックスバウム・リム重複度が、可換環論のみならず、他の分野においてもその重要性を増してきている状況から、可換環論分野における研究動向に加え、他分野の研究動向にも注意を向ける。本研究課題に関連する研究集会に参加し、最新の研究動向の調査・情報収集を行う。明治大学可換環論セミナーにおいて、研究の進捗状況の発表を行い、研究内容の点検・発展をはかる。研究成果は、国内外における研究集会において講演発表を行う。

4. 研究成果

(1) 上述の Hyry 氏との共同研究による巴系加群の重複度と colength の間の不等式を自然に発展させる形で得られていた巴系加群のブックスバウム・リム関数に関する精密な結果を論文として纏め、発表した (論文 5-②)。この結果から巴系加群の第一ブックスバウム・リム係数は非正であるという巴系イデアルの第一ヒルベルト係数に関する最近の結果の類似が得られた。論文発表後、Vasconcelos 氏から第一ブックスバウム・リム係数の消滅と基礎環のコーエン・マコーレー性について質問があった。巴系イデアルの第一ヒルベルト係数については、後藤四郎氏や Vasconcelos 氏を中心に、最近、非常に詳しい解析が活発になされてきているところであるが、その類似が加群の場合に正しいかどうかは興味深い問題である。Hyry 氏との共同研究での成功を基礎にこの問題に取り組んだが、まとまった成果は得られていない。今後の課題である。

(2) 標準的な次数付けとは限らない多重次数付き環 (加群) の斉次成分の深さの漸近挙動について調べ、Koszul 複体を用いた簡明な証明法で、斉次成分の深さは、ある錐内において周期的な挙動を示すことを証明した。これまでの深さの漸近挙動に関する古典的な結果は、すべてこの結果の系として直ちに得られる。また、Colome-Nin と Elias による標準的とは限らない多重次数付き環 (加群) に関する最近の研究結果を大幅に拡張、発展させた。この結果は論文として纏め、発表した (論文 5-①)。また、国内の研究集会において講演発表を行った。

(3) 標準的な次数付けとは限らない多重次数付き環の環拡大の斉次成分の随伴素イデアルの漸近挙動について調べ、標準的次數付き環拡大の場合の結果を自然に拡張する形で、斉次成分の随伴素イデアルの集合が、ある錐内において漸近的周期性を持つことを証明した。この結果は、これまでの随伴素イ

デアルの漸近挙動に関する結果を含む一般的なものである。この応用として、上記成果(2)で得られていた斉次成分の深さに関する漸近的周期性が、より一般的な状況で成り立つことがわかった。この結果は論文として纏め、専門誌に投稿済みである。また、国内外における研究集会において講演発表を行った。

(4) 標準的な次数付き環拡大から構成される多重次数付き環とそのヒルベルト関数について調べた。この関数は、Kleiman-Thorup、Kirby-Reesによって導入・研究された関数で、加群のブックスバウム・リム関数の一般化であり、ブックスバウム・リム重複度とも密接な関係があることがわかっている。局所環上の巴系加群に付随する次数付き環拡大の場合に、この一般化されたブックスバウム・リム関数について詳しく調べ、(通常)のブックスバウム・リム関数に関する我々の結果(論文5-②)が、より一般的な状況で成り立つのではないかと予想を得るに至った。上記課題①の完全解決には至らなかったものの、枠組みをこのような一般的な場合にまで広げることで、イデアルの重複度研究で重要な役割を果たしていた上表元の議論の類似の可能性を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Futoshi Hayasaka,
Asymptotic periodicity of grade associated to multigraded modules, Proceedings of the American Mathematical Society 140, 2012, pp. 2279–2284, 査読有
- ② Futoshi Hayasaka, Eero Hyry,
On the Buchsbaum–Rim function of a parameter module, Journal of Algebra 327, 2011, pp. 307–315, 査読有

[学会発表] (計5件)

- ① Futoshi Hayasaka,
Asymptotic behavior of primes associated to multigraded modules, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2011年12月16日, Quy Nhon University (ベトナム)
- ② 早坂 太,
Asymptotic periodicity of primes associated to multigraded modules, 第33回可換環論シンポジウム, 2011年11月8日, 浜名湖カリアック (浜松)
- ③ 早坂 太,
多重次数付き加群の grade の漸近的周期性, 日本数学会, 2011年9月28日, 信州大学
- ④ 早坂 太,
Asymptotic behavior of the grade associated to multigraded modules, 第32回可換環論シンポジウム・The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra (共催), 2010年12月13日, IPC生産性国際交流センター (葉山)
- ⑤ 早坂 太,
加群のブックスバウム・リム関数, 第141回数理情報科学談話会, 2010年7月28日, 鹿児島大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

早坂 太 (HAYASAKA FUTOSHI)

鹿児島工業高等専門学校・一般教育理系・講師

研究者番号: 20409460

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし