科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２６　年　　６　月　　６　日現在

機関番号：　１１３０１
研究種目：　若手研究(B)
研究期間：　2010～2013
課題番号：　２２７４００３１

研究課題名（和文）多様体の退化を通じたミラー対称性及び可積分系の研究

研究課題名（英文）Study of mirror symmetry and integrable systems via degeneration of varieties

研究代表者
西納　武男（NISHINOU, TAKEO）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：５０４２０３９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円、（間接経費）　　930,000円

研究成果の概要（和文）：複素構造とシンプレクティック構造という、一見全く異なる幾何構造が深いところで結びついているというミラー対称性の主張と、それに関連した数学の研究を行った。特に、トロピカル幾何学という新しい概念を用いて、複雑な幾何学を組み合わせ論的に扱うことができる単純な対象によって表現し、ミラー対称性の研究に応用した。また、旗多様体やリーマン面上のベクトル束のモジュライ空間といった、古典的にも重要な幾何的対象の研究にも応用した。

研究成果の概要（英文）：We studied aspects of mirror symmetry, which implies deep relationship between complex geometry and symplectic geometry, the geometries whose definitions are completely different. We made use of tropical geometry, a rather new field of research in geometry. With this new idea, we were able to describe several complicated geometric constructions in a simpler, combinatorial manner, and applied these results to mirror symmetry. Moreover, we applied our method to the study of important geometric objects such as flag manifolds or moduli space of vector bundles on Riemann surfaces.

研究分野：　幾何学

科研費の分科・細目：　幾何学

キーワード：　幾何学

１．研究開始当初の背景
(1) 1990 年前後に素粒子物理学の一分野である弦理論で提唱されていたミラー対称性から非常に非自明な数学的な主張が導出されて以来、ミラー対称性に関わる数学的研究は非常に活発に行われるようになった。ミラー対称性の研究において元々考えられていたのは 3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合であるが、その後の研究でファノ多様体、高次元多様体やランダウ・ギンツブルグ模型と言った対象まで研究範囲が拡張されていった。

(2) それらのミラー対称性の研究においては、多くの場合にある種の正則曲線を考えることが重要になる。しかし一般に複素多様体の中の正則曲線を扱う問題は非線形偏微分方程式の問題であり、困難が伴う。そんな中で２１世紀に入ってからトロピカル幾何学という新しい幾何学の概念が提唱され、種々の正則曲線を 1 次元グラフのような組み合わせ論的に扱える対象によって研究する分野が拓かれた。

２．研究の目的
(1) 当該研究では、トロピカル幾何学を用いた正則曲線の研究、およびそのミラー対称性に関わる数学への応用を目的とする。それにより、従来扱うことが難しかった幾何的対象の理解を深める。

(2) また、トロピカル幾何学は提唱されて間もない新しい幾何学であり、基礎的な研究も重要である。元々は閉リーマン面に対応したトロピカル多様体が考えられ、その後高次元のものも定義されているが、トロピカル多様体の概念がどのように拡張される得るかを研究する。

３．研究の方法
(1) ミラー対称性の主張が数学的に正確な意味を持つには、多様体のモジュライ空間における特別な点の近傍で解析することが有効な場合が多い。特に複素構造の極大退化と呼ばれる点はトロピカル幾何学との関わりが深く、このような多様体の退化を利用して研究を進める。

(2) 複素構造の極大退化点では多様体はいくつかの既約成分に分裂し、それぞれの成分はトーリック多様体の構造を自然に持つことが期待される。トロピカル幾何学はトーリック多様体とも関わりが深いので、(1)とあわせることで多様体のトロピカル幾何学を用いた研究をすすめる。

(3) 一方で、旗多様体など、トーリック多様体ではないがそれに近い構造(可積分構造)を持つ重要な多様体がある。このような場合もトーリック多様体の場合の研究を拡張することによって、トロピカル幾何学を用いた研究が可能である。

４．研究成果
(1) 香川大学の野原雄一氏および大阪大学の植田一石氏との共同研究(Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, Volume 88, Number 2 (2012), 31-33.)で、ある種の条件を満たす Fano 多様体上のフレアーコホモロジーの研究を行った。旗多様体のような可積分系の構造を持つ複素多様体の、可積分系としてのトーリック退化の概念を導入した。旗多様体のような多様体は可積分系の構造を持つとはいえ、トーリック多様体と異なり多様体全体で可積分系の構造がある訳ではなく、特異ファイバーを除いた開集合上のみで可積分系の構造を持つ。従ってトーリック多様体において得られていた正則曲線に関する Cho 氏, Oh 氏による結果(Asian J. Math.,10, (2006), no. 4, 773--814.)を直接適用することはできないが、特別な場合には可積分系のトーリック退化を用いてトーリック多様体上の結果を旗多様体などに拡張することができる。このことを用いて、退化の特異ファイバーが特異点の小解消を持つファノ多様体の場合に、フレアーホモロジー論におけるポテンシャル関数を決定した。ポテンシャル関数がわかるとそこから可積分系のトーラスファイバーのフレアーホモロジーの情報が読み取れる。このことを用いて、種数 2 のランク 2 の安定ベクトル束のあるモジュライ空間上に非加算無限個の non-displacable Lagrangian torus が存在することを示した。

(2) トロピカル曲線の研究は閉リーマン面をある種のグラフを用いて理解する試みとして始まったが、ミラー対称性の研究においては閉リーマン面だけでなく境界付きリーマン面を考えることが重要である。論文(Amer. J. Math., 134 (2012), 1423--1472.)において、境界付きトロピカル曲線の概念を導入し、境界付きリーマン面との関係を調べた。一般にトロピカル曲線はその頂点において balancing condition と呼ばれる条件を満たさなければならないが、境界付きトロピカル曲線は一価頂点を許し、そこでは balancing condition は満たされない。また B.Siebert 氏との共同研究(Duke Math. J. 135

(2006), no. 1, 1-51.)で得られていた、種数 0 の閉リーマン面と tree であるトロピカル曲線との対応では、閉リーマン面が代数曲線であることから、代数幾何の既存の手法を用いることができたのに対し、境界付きリーマン面は代数曲線ではないので、その手法を直接適用することはできない。そこで境界条件付きの変形理論を構成し、境界付きリーマン面の場合にも代数的な扱いができるようにした上で、境界付きトロピカル曲線と境界付きリーマン面の対応を示した。境界付きリーマン面は従来解析的な手法しかなく、一方で曲線が特異点を持つときには解析的な手法より代数的な手法を用いた方が有効である。ここで構成した境界付き変形理論により特異点のある境界付きリーマン面に対する有効な研究手段が与えられ、その後に下の(3)におけるようなトーリック多様体の特異点を通る正則曲線のトロピカル曲線を用いた研究や、ミラー対称性で重要な役割をするマスロフ指数 0 の正則ディスクの構成などにもこの手法を用いて研究を進めた。

(3) (1)における結果は旗多様体などの多様体の可積分系のトーリック退化を用いてフレアーホモロジー論におけるポテンシャル関数を計算するというものであったが、そこでは最も簡単なマスロフ指数 2 の正則ディスクのみを調べれば十分で、トロピカル幾何の結果は特に必要ではなかった。その後の研究をまとめた論文(Canadian Journal of Mathematics, 印刷中)において、可積分系のトーリック退化の手法を用いて、旗多様体などの多様体の中の閉リーマン面を調べた。ここではトーリック退化を通じてトーリック多様体上でのトロピカル幾何学の結果が旗多様体などの多様体に適用される。その際、従来のトーリック多様体上のトロピカル曲線の理論はトロピカル曲線がトーリック多様体の四次元の高い部分多様体(特にトーリック多様体の特異点)と交わらないという仮定の下に行われていたが、旗多様体などの可積分系の構造には特異ファイバーがあることから、トーリック多様体の特異点と交わる正則曲線について調べる必要がある。この点を解決するために、(2)における正則ディスクと境界付きトロピカル曲線の対応および Cho 氏,Oh 氏によるトーリック多様体上の正則ディスクの詳細な記述を用いて、閉リーマン面を 2 つの境界付きリーマン面に分割し、それぞれにトロピカル曲線の理論を適用する手法を用いた。その結果、旗多様体などの場合にトロピカル曲線による Gromov-Witten 不変量の計算や、奇数次元サイクルを引数に持つ Gromov-Witten 不変量の計算などの計算を行うことができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）
①西納武男、Toric degenerations, tropical curves and Gromov-Witten invariants of Fano manifolds, Canadian Journal of Math., 査読あり、印刷中 (2014).

② 西納武男、Disc counting on toric varieties via tropical curves, Amer. J. Math., 査読あり、Volume 134、(2012)、1423-1472.

③西納武男、野原雄一、植田一石、Potential functions via toric degenerations, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 査読あり、Volume 88, Number 2 (2012), 31-33

〔学会発表〕（計 12 件）
① 西納武男、トロピカル曲線のパラメータ空間について. 京都大談話会. 2014.1.15 京都.

② 西納武男、On Brill-Noether loci of graphs. ミラー対称性の展望. 2013.12.26 京都.

③ 西納武男、トロピカル曲線の代数幾何. 青山トロピカルセミナー. 2013.12.13 東京.

④ 西納武男、On Caporaso's conjecture on Brill-Noether loci for trivalent graphs. The 9th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan. 2013.9.5 札幌.

⑤西納武男、Degeneration and holomorphic curves. 京都大代数幾何セミナー. 2013.1.18 京都.

⑥西納武男、多様体の退化と正則曲線. 日本数学会東北支部会. 2012.1.13 盛岡.

⑦西納武男、K3 曲面の退化と有理曲線。幾何学コロキウム. 2011.11.16 札幌.

⑧ 西納武男、トロピカル幾何とその周辺. 量子可積分系の新展開 II. 2011.9.17 静岡.

⑨ 西納武男、Counting curves via degeneration. East Asia Symplectic conference. 2011.6.22 ソウル.

⑩ 西納武男、Counting curves via

degeneration. Symplectic geometry and related topics. 2011.5.25 成都.

⑪ 西納武男、Toric degeneration and tropical curves. Derived category, Mirror symmetry and McKay correspondence セミナー。2010.12. 6IPMU

⑫西納武男、Correspondence theorems for tropical curves. 第57回幾何学シンポジウム. 2010.8.6 神戸

６．研究組織

(1)研究代表者

西納　武男（NISHINOU, TAKEO）

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50420394