

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740034

研究課題名（和文） 円周の微分同相群と普遍タイヒミュラー曲線の不連続群

研究課題名（英文） Diffeomorphism group of the circle and discontinuous groups of the universal Teichmüller curve

## 研究代表者

松田 能文（MATSUDA YOSHIFUMI）

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：60549294

## 研究成果の概要（和文）：

滑らかな普遍タイヒミュラー曲線の境界とその上への円周の微分同相群の部分群の作用について考察した。また、二つの有限群の自由積の円周への作用の中でフックス群としての作用を回転数に関する条件で特徴づけた。

さらに、収束群作用を許容する群の既約  $C^*$ 群環の単純性について明らかにした一方で、与えられた群の二つの幾何学的有限な収束群作用の間に同変写像が存在するための必要十分条件を与え収束群作用の構成に利用した。

## 研究成果の概要（英文）：

We studied a boundary of the smooth universal Teichmüller curve and the action of subgroups of diffeomorphism group of the circle on this boundary. Among actions of free product of two finite groups on the circle, we characterized Fuchsian actions in terms of rotation number.

We obtained a result about simplicity of the reduced group  $C^*$ -algebra of a group admitting convergence actions. We gave a necessary and sufficient condition for two geometrically finite convergence actions to admit an equivariant continuous map and applied it to construct examples of convergence actions.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

 キーワード：円周，微分同相群，フックス群，回転数，収束群作用，相対的双曲群， $C^*$ 群環，Cannon-Thurston 写像

## 1. 研究開始当初の背景

次元の低い多様体への無限離散群の作用については近年研究が進んでいる。その中で、円周への作用は特に多くの結果が得られて

いるが、近年得られている結果の多くは Zimmer のプログラムに基づいて円周にはほぼ自明にしか作用できない、すなわち、任意の作用が有限群の作用を経由する、ような群を

見出すものであった。なお、以下では円周への作用は向きを保つもののみを考える。

一方、円周に滑らかに作用する無限離散群の知られている例は少ない。特に円周の微分同相群の離散部分群はトンプソン群の埋め込みを除いてはフックス群以外にほとんど知られていなかった。

## (2) 収束群作用について

収束群作用はクライン群の球面への作用の力学系的な一般化として導入された概念である。円周への収束群作用はフックス群の作用と位相共役であるという「収束群定理」が知られていた。

一方、円周への擬メビウス作用、すなわち各々の元の作用はメビウス変換と位相共役な作用であって、フックス群の作用と位相共役でないものが存在することも知られていた。しかし、有限生成群の滑らかな作用でそのようなものが存在するか知られていなかった。

## 2. 研究の目的

### (1) 円周の微分同相群について

① 円周の微分同相群の離散部分群について、円周の微分同相群の回転のなす部分群による商空間として定義される滑らかな普遍タイヒミュラー曲線への作用を理解することを目的としていた。特に、「収束群定理」の類似として、滑らかな普遍タイヒミュラー曲線への作用に関する条件により円周の微分同相群の離散部分群の中でフックス群と位相共役なものの特徴づけることを目指していた。

② 擬メビウス作用など円周への収束群作用について、収束群作用との類似点・相違点などを明らかにすることを目的とした。

③ 研究後半ではさらに円周の同相写像の回転数に関する条件により円周の微分同相群の離散部分群の中でフックス群と位相共役なものの特徴づけることができるを明らかにすることを目的とした。

### (2) 収束群作用について

① 円周とは限らない空間への収束群作用について非初等的な収束群作用を許容する群の性質を明らかにし、円周へ収束群作用の類似である作用を許容する群の性質を明らかにする手がかりを得ることも目的とした。

② 与えられた群の収束群作用を個別に調べるのではなくその群が許容する種々の空間への収束群作用の相互関係を明らかにする

ことを目的とした。

## 3. 研究の方法

### (1) 円周の微分同相群について

① フックス群のポアンカレ円板への作用を研究する際にはポアンカレ円板のコンパクト化および無限遠境界が重要である。この事を踏まえて、滑らかな普遍タイヒミュラー曲線のコンパクト化および境界に着目することで円周の微分同相群の部分群の滑らかなタイヒミュラー曲線への作用を調べた。

② 収束群作用は3点部分集合のなす空間に誘導される作用が固有不連続であるような作用であることに着目して、3より大きい整数  $n$  に対して、 $n$  点部分集合のなす空間に誘導される作用が固有不連続であるような作用について考察した。そのような作用について、収束群作用の収束列を用いた特徴づけの類似が知られているのでそれを用いた。

③ 回転数に関する条件による円周の微分同相群の離散部分群の中でのフックス群と位相共役なものの特徴づけについては、巡回群の自由群と同型なものについて考察した。その際には、(広い意味での)ピンポン補題に現れる力学系、および円周への群作用の準共役性の有界オイラー類による特徴づけを用いた。

### (2) 収束群作用について

① 非初等的な収束群作用を許容する群の性質として既約  $C^*$  群環の単純性に注目する。収束群作用が既約  $C^*$  群環の単純性を保証する作用の力学系的性質を持つことを調べる際には楕円的な元の扱いに注意した。

② 与えられた群の二つの収束群作用に関して同変連続写像が存在する場合に注目した。さらに、収束群作用付きの空間とそれらの間の同変連続写像からなる射影系の射影極限に収束群作用が誘導されるという事実を用いて新たな収束群作用を得た。

## 4. 研究成果

### (1) 円周の微分同相群について

① 円周の微分同相群を二つの円周の直積の閉部分集合からなる集合に Vietoris 位相を与えた空間の部分空間と見なすことにより、滑らかなタイヒミュラー空間のコンパクト化および境界を与えた。このコンパクト

ト化への円周の微分同相群の作用について、回転数が無理数であるが無理数回転との共役写像として微分同相写像が取れない微分同相写像は上記のコンパクト化の境界に唯一の固定点を持つなど、メビウス変換群とは異なる現象などが作用の各元への制限については確かめられた。

一方、このコンパクト化への円周の微分同相群の作用に関する極小集合の記述など作用全体に関する研究は今後の課題として残された。

② フックス群の  $n$  重被覆の円周の  $2n+1$  点部分集合のなす空間に誘導される作用が固有不連続であることが確かめられた。フックス群の有限被覆たちは円周の微分同相群の離散部分群の族として知られているものでは最も一般的なものの一つである。ここで確かめられた事実は円周の微分同相群の離散部分群の研究に新たな視点を与える観察であると考えられる。

③ 二つの有限群の自由積の円周への作用の中でフックス群としての作用と準共役なもの二つの因子群の生成元およびその積の回転数に関する条件に特徴づけられるを証明した。その仮定で、この上記の条件を満たす作用が効果的であることと作用から定まる円周の(微分)同相群の部分群がコンパクトに関して位相に関して離散的であることを証明した。

これらの結果は、種数が2以上の閉曲面の基本群の円周への作用の中で余コンパクトなフックス群としての作用が作用のオイラー数により特徴づけられることの類似と考えられる。

## (2) 収束群作用について

① 非初等的な収束群作用を許容する群に対して、非自明な有限正規部分群の非存在と既約  $C^*$ 群環の単純性が同値であることを証明した(尾國新一氏(愛媛大学), 山形紗恵子氏(横浜国立大学)との共同研究、発表論文②)。これは、相対的雙曲群に対して知られていた事実の拡張である。

一方、これが真の拡張であることを保証するための道具にもなる「どのような部分群の族に対しても非初等的な相対的に雙曲的でないが非初等的な収束群作用を許容する群を構成する」という課題が残された。

② 与えられた群の二つの幾何学的有限な収束群作用に関して同変連続写像が存在するための必要十分条件をそれぞれの作用に関する放物的部分群の包含関係により与えた。さらにその応用として、任意の非初等

的な相対的雙曲群に対して、無限個の幾何学的有限でない収束群作用を幾何学的有限な収束群作用の逆極限として許容すること証明した(尾國新一氏, 山形紗恵子氏との共同研究)。

③ ②で述べた条件のさらなる応用として、Baker-Rileyにより構成された雙曲群の間の単射準同型であって Cannon-Thurston 写像、すなわち Gromov 境界の間の同変連続写像を誘導しないものを用いて、任意の相対的雙曲群に対して、ある相対的雙曲群への単射準同型であって放物的部分群を放物的部分群に写すが Bowditch 境界の間の同変連続写像を誘導しないものが存在することを証明した。特に、任意の雙曲群に対して、ある雙曲群への単射準同型であって Cannon-Thurston 写像を誘導しないものが存在することを証明した(尾國新一氏との共同研究、発表論文①)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Y. Matsuda and S. Oguni, On Cannon-Thurston maps for relatively hyperbolic groups, to J. Group theory (掲載決定), 査読有。
- ② Y. Matsuda, S. Oguni and S. Yamagata,  $C^*$ -simplicity for groups with non-elementary convergence group actions, Houston J. Math. (掲載決定), 査読有。

[学会発表] (計3件)

- ① Y. Matsuda, Blowing up and down compacta with geometrically finite convergence actions of a group, Rigidity School Tokyo 2011/2012, 2012年3月19日, 東京大学。
- ② Y. Matsuda, The universal relatively hyperbolic structure on a group and relative quasiconvexity for subgroups, Geometry and dynamics, 2011年10月16日, リヨン高等師範学校(フランス)。
- ③ Y. Matsuda, On the isometry group of the universal Teichmüller curve, Workshop(s): Lefschetz fibration and category theory, 2010年6月11日, 大阪大学。

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

〔その他〕

ホームページ等

無し

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松田 能文 (MATSUDA YOSHIFUMI)

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：60549294

### (2) 研究分担者

無し

### (3) 連携研究者

無し