

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月19日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740041

研究課題名（和文） ケーラーアインシュタイン計量の存在問題と安定性に関する研究

研究課題名（英文） Kahler-Einstein metrics and stability

研究代表者

佐野 友二（SANO YUJI）

熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：00399792

研究成果の概要（和文）：ケーラーアインシュタイン計量に関する問題を微分幾何・代数幾何の手法を用いて調べ、次の結果を得た。（1）ファノ多様体のアルファ不変量とK安定性の関係を微分幾何の結果を経由せずに明らかにした。（2）漸近的チャウ不安定なケーラーアインシュタイン多様体の例を初めて与えた。（3）ケーラー・リッチフローから生成される乗数イデアル概型のサポートをトーリックファノ多様体の場合に計算した。（4）コンパクト縮小リッチソリトンの直径の下限を与えた。

研究成果の概要（英文）：In this project, we proved the following results. (1) We showed the algebro-geometric proof for the relation between the alpha invariant and K-stability. (2) We gave the first example of asymptotically Chow unstable Kahler-Einstein manifolds. (3) We calculated the support of the multiplier ideal subschemes induced by Kahler-Ricci flow. (4) We gave the lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：ケーラー幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ケーラーアインシュタイン計量, K-安定性

1. 研究開始当初の背景

第1チャーン類が非正の場合と異なり、正の場合のケーラー多様体（ファノ多様体）上には、松島の定理・二木不変量の積分不変量などの障害により、必ずしもケーラーアインシュタイン計量が存在するとは限らないことが知られていた。そのため、ケーラーアインシュタイン計量が存在するための条件を決定することがケーラー幾何の問題の一つ

になっていた。類似の問題が既にベクトル束の場合に設定・解決されており、小林・ヒッチン対応として知られていた。それは「ベクトル束にエルミートアインシュタイン計量が存在することと Mumford・竹本の意味で安定であることが同値である」ことを主張している。後者の安定性とは幾何学的不変式論から得られる、モジュライ空間を構成する際の条件である。多様体の場合にもケーラーア

インシュタイン計量の存在と幾何学的不変式論に關係する多様体の安定性が同値であろうという予想が提起された。ティアンが K 安定性を導入したことから始まり、漸近的チャウ安定性やスロープ安定性など、いくつかの安定性が導入され、標準ケーラー計量の存在との關係が研究された。これらの結果を踏まえて当初の予想は次のように定式化されていた：偏極多様体上に定スカラー曲率計量が存在することと K 安定であることは同値である (Yau-Tian-Donaldson 予想)。この予想は Donaldson, Chen-Tian, Stoppa, 満洲らにより計量の存在 $\rightarrow K$ 安定の方向は示されていた。しかし、逆方向については、(研究開始当時) まだ未解決の問題であった。

2. 研究の目的

Yau-Tian-Donaldson 予想の、安定性 \rightarrow 計量の存在の方向の解決を最終目標としていた。そのために、多様体が標準ケーラー計量を持たない場合に、どのような障害が生じるのかを微分幾何・代数幾何の側面から理解することを目的としていた。特に、ファノ多様体上のケーラーアインシュタイン計量の場合に限定して考えることで、すでに知られているファノ多様体の代数幾何的性質と微分幾何的な対象であるアインシュタイン計量がどのように関連しているのかを明らかにしたいと考えていた。

3. 研究の方法

- (1) Yau-Tian-Donaldson 予想は、アインシュタイン計量の一般化である、定スカラー曲率計量やカラビの端的ケーラー計量に対して設定されていた。この研究課題ではファノ多様体上のケーラーアインシュタイン計量の場合に限定して研究を進めた。ケーラー・リッチフローや乗数イデアル層など、すでによく知られている概念を利用して研究を進めることができた。特に、多様体がケーラーアインシュタイン計量を持たない場合にはケーラー・リッチフローが乗数イデアル層を誘導することが知られていた。このイデアル層を調べることでケーラーアインシュタイン計量の存在への代数幾何的障害を調べようとした。
- (2) 多様体をトーリックのときに限定した。これにより、より具体的に乗数イデアル層の情報を調べることができた。
- (3) (2) で得られた知見を元に、乗数イデアル層と關係が深い、Tian のアルファ不変量と K 安定性を結ぶものとして標準的対数閾値や Seshadri 定数に注目すべきであることが分かった。

4. 研究成果

本研究課題は、Yau-Tian-Donaldson 予想の解決を目標としていたが、主な成果としては付随する問題の解決をすることができた。大まかに成果を3つに分けることができる。

(1) K 安定性と代数幾何 (双有理幾何) の關係について：

- ① Nadel や Demailly-Kollar によりモンジュ・アンペール方程式の連続法が解けない場合に非自明な乗数イデアル層が得られることが示されていた。ケーラー・リッチフローが収束しない場合にも同様な結果が得られることが Rubinstein により示された。この結果をトーリックファノ多様体に適用することで (Demailly-Kollar の意味での) 乗数イデアル層のサポートを具体的に計算することができた (発表論文②)。トーリックファノ多様体の場合には Wang-Zhu の結果よりケーラー・リッチフローが収束しなければケーラー・リッチソリトンが存在することが示されており、これによりケーラー・リッチフローの漸近的な振る舞いは捉えやすくなる。Demailly-Kollar の乗数イデアル層は Nadel の定義と異なり、概多重劣調和関数と指数を組にして定義される。よって、指数が異なれば得られるイデアル層も異なることが予想される。発表論文②では複素射影平面を2点ブローアップして得られる曲面では、指数によって乗数イデアル層に対応する概型のサポートがジャンプすることを確かめることができた。この例では、Ross-Thomas の意味で K 不安定にするようなテスト配位を構成できないことが分かっていた (Panov-Ross, Math. Ann. 2009)。今後の課題として、乗数イデアル層の指数による変化 (ジャンプ) を利用して Ross-Thomas の方法で脱 K 安定テスト配位を構成することが可能か否かを調べていきたいと考えている

- ② 研究成果 (1) -①の中で、乗数イデアル層の指数を考えていたが、これは Tian がケーラーアインシュタイン計量の存在への十分条件を与えるために導入したアルファ不変量と深く関連している。Tian の十分条件とは「アルファ不変量が (次元のみ依存する) ある定数よりも大きければケーラーアイン

シュタイン計量が存在する」ことを主張している。この結果と Yau-Tian-Donaldson 予想を合わせると『アルファ不変量が（次元のみ依存する）ある定数よりも大きければ、ファノ多様体は K 安定である』（★）ことが分かる。アルファ不変量は、双有理幾何における極小モデル理論で重要な役割を果たす（大域的）標準的対数閾値に等しいことが知られている。よって主張（★）は純粋に代数幾何的な主張に置き換えられる。しかし、証明はケーラーアインシュタイン計量の存在を経由するものしか知られていなかった。発表論文④では、（★）に代数幾何的な証明を与えた（尾高悠志氏との共同研究）。この結果は双有理幾何が K 安定性の研究に応用できることを示す例と言える。

(2) 漸近的チャウ不安定ケーラーアインシュタイン多様体の例について：

- ① Donaldson (2001, JDG) により、自己同型群が離散的な場合に、偏極多様体上の定スカラー曲率計量の存在が漸近的チャウ安定性を導くことが示されていた。自己同型群が離散的ではない場合には、満洲氏 (2005, Invent. Math.) により研究され、次のような結果が知られていた；偏極多様体が定スカラー曲率計量を持ち、「ある条件☆」を満たせば、漸近的チャウ安定である。ここでの「ある条件☆」とは二木氏 (2004, Intern. J. Math.) によって導入された積分不変量の族が消滅することと等しい。この積分不変量の族は、従来の二木氏が導入した積分不変量（二木不変量）を含むもので、それは定スカラー曲率計量が存在しているときには消滅している。そこで、「多様体が定スカラー曲率計量を持てば、他の不変量も消滅するか？」という問題が残っていた。まず、この問題についてトーリックファノ多様体上で具体的な計算を行なった（発表論文⑥、二木昭人氏・小野肇氏との共同研究）。従来の二木不変量を計算する手法の一つであった局所化公式を一般化された二木不変量の族に適用して計算する方法に加え、トーリックファノ多様体のヒルベルト級数の第一変分から得られる不変量の族と一般化された二木不変量の族が

同じ情報を持っていることを示し、ヒルベルト級数の第一変分の組み合わせ論的なデータを用いて計算する手法を得た。これらの結果を用いて3次元の場合に具体的な計算を行なった。

- ② トーリックファノ多様体の中で、定スカラー曲率計量（つまりケーラーアインシュタイン計量）を持ち、一般化された二木不変量の族が消滅しないためには、Batyrev-Selivanova の意味で対称ではないケーラーアインシュタイン多様体でなければならない。このような例は知られていなかったが、最近になり Nill-Paffenholz により7次元の場合に例が提示された。発表論文⑥で得た計算方法を適用することで、その例がケーラーアインシュタイン多様体で一般化された二木不変量の族が証明しない例であることを確認した。これは、漸近的チャウ不安定なケーラーアインシュタイン多様体の初めての例になり、満洲氏の結果において条件☆が本質的であることを示した。この結果は小野肇氏・四ツ谷直仁氏との共同研究によるものである（発表論文③）。

(3) コンパクト縮小リッチソリトンの直径の下限について：

リッチソリトンはリッチフローの自己相似解として知られている。その自明な場合はアインシュタイン計量になる。4次元以上のコンパクト・リーマン多様体上のリッチソリトンは勾配縮小リッチソリトンであることが知られている。一方で、Myers の定理から、アインシュタイン計量を持つコンパクト・リーマン多様体の直径の上限が得られる。発表論文①では、非自明な勾配縮小リッチソリトンを持つコンパクト・リーマン多様体の直径の下からの評価を行った（二木昭人氏との共同研究）。勾配リッチソリトンに対しては Bakry-Emery 幾何における Bakry-Emery ラプラシアンを考えることが出来る。これを用いて、証明は2段階に分けて行なわれる。第1段階では Bakry-Emery ラプラシアンの第1固有値を求める。これは Kahler 幾何の類似の計算によって得られる。第2段階では、ラプラシアンの第1固有値を直径を用いて下から評価する Li-Yau type の結果 (Ling, 2007, AGAG) を Bakry-Emery ラプラシアンの場合に拡張する。この二つの結果を組み合わせることで主結果

を得ることが出来た.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① Akito Futaki, Yuji Sano, Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons, The Asian Journal of Mathematics, 査読あり, Vol. 17, 2013, 17-32.

② Yuji Sano, Multiplier ideal sheaves and the Kahler-Ricci flow on toric Fano manifolds with large symmetry, Communications in Analysis and Geometry, 査読あり, Vol. 20, 2012, 341-368.

③ Hajime Ono, Yuji Sano, Naoto Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, Annales de L'Institut Fourier, 査読あり, Vol. 62, 2012, 1265-1287.

④ Yuji Odaka, Yuji Sano, Alpha invariant and K-stability of \mathbb{Q} -Fano varieties, Advances in Mathematics, 査読あり, Vol. 229, 2012, 2818-2834.

⑤ Akito Futaki, Yuji Sano, Multiplier ideal sheaves and geometric problems, London Mathematical Society Lecture Note Series, 394, 査読あり, Cambridge University Press, Cambridge, 2012, 68-93.

⑥ Akito Futaki, Ono Hajime, Yuji Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Advances in Mathematics, 査読あり, Vol. 226, 2011, 254-284.

[学会発表] (計13件)

① Yuji Sano, Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy, Recent Developments in Kahler Geometry, 2012.12.10, Institut Henri Poincare (フランス).

② 佐野友二, A dynamical approach to balanced metrics with automorphism group, Symposium on ARITHMETIC & GEOMETRY, 2012.6.2, 九州大学 (福岡)

③ 佐野友二, Alpha invariant and K-stability of Fano varieties (joint with Y. Odaka), 第7回代数・解析・幾何セミナー

一, 2012.2.14, 鹿児島大学 (鹿児島)

④ Yuji Sano, A dynamical approach to balanced metrics with automorphism group, 第7回日中友好幾何学研究集会, 2012.1.14, ホテルレジーナ河口湖 (山梨県)

⑤ Yuji Sano, A dynamical approach to balanced metrics with automorphism group, 2011 Complex Geometry and Symplectic Geometry Conference, 2011.8.16, 中国科学技术大学 (中国)

⑥ 佐野友二, ケーラー・アインシュタイン計量の存在への障害的因子について, 部分多様体の微分幾何学的研究, 2011.6.28, 京都大学数理解析研究所 (京都)

⑦ 佐野友二, Alpha invariant and K-stability of Fano varieties (joint work with Yuji Odaka), 代数幾何学研究集会 - ファノ多様体と正標数上の話題を中心として -, 2011.2.21, 九州大学 (福岡)

⑧ Yuji Sano, Alpha invariant and K-stability of Fano varieties, Extremal metrics: evolution equations and stability (Complex and Riemannian Geometry Week2), 2011.2.8, CIRM (フランス)

⑨ Yuji Sano, Alpha invariant and K-stability of Fano varieties, Birational Geometry in honor of V.V. Shokurov's 60th Birthday, 2010.12.10, ICMS Edinburgh (エジンバラ)

⑩ Yuji Sano, Alpha invariant and K-stability, 第16回複素幾何シンポジウム, 2010.10.23, 信州菅平高原 プチホテル ズンタック (長野県)

⑪ Yuji Sano, On multiplier ideal sheaves and test configurations on toric Fano manifolds (Obstructive divisors to Kahler-Einstein metrics), Komplexe Analysis, 2010.9.1, Oberwolfach (ドイツ)

⑫ Yuji Sano, On multiplier ideal sheaves and test configurations on toric Fano manifolds, Workshop on Moduli and Birational Geometry, 2010.8.6, POSTECH (韓国)

⑬ Yuji Sano, Obstructive divisors to the existence of Kahler-Einstein metrics, The 5th Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference 2010, 2010.7.30, 伊

勢志摩ロイヤルホテル（三重県）

〔その他〕

ホームページ等

<http://http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~sano/research.html>

<http://researchmap.jp/sanoyuji/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐野 友二 (SANO YUJI)

熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：00399792