

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740042

研究課題名（和文） グロモフ・ウィッテン理論とミラー対称性

研究課題名（英文） Gromov-Witten theory and mirror symmetry

研究代表者

入谷 寛 (Iritani Hiroshi)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20448400

研究成果の概要（和文）：グロモフ・ウィッテン理論の大域的構造をミラー対称性の観点から調べ、次の成果を得た。(1) トーリック軌道体の完全交差に対するミラー対称性を示し、A 模型と B 模型における整構造の一致を検証した。(2) Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 対応を重み付き射影空間の Calabi-Yau 超曲面に対して調べ、Orlov による圏同値と関係づけた。(3) トーリック多様体に対する Seidel 表現を調べ、ミラー変換との関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We studied a global structure of Gromov-Witten theory from a viewpoint of mirror symmetry. Our results include: (1) mirror symmetry for complete intersections in toric orbifold and matching of integral structures from the A-model and the B-model (2) Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for weighted projective Calabi-Yau hypersurfaces and its relation to Orlov's derived equivalence (3) Seidel representation for toric manifolds and the relation to mirror transformation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ミラー対称性，グロモフ・ウィッテン理論，トーリック多様体，量子コホモロジー，ホッジ理論，軌道体，幾何学的量子化，Seidel 表現

1. 研究開始当初の背景

量子コホモロジーおよびグロモフ・ウィッテンポテンシャルの解析接続について、クレパント解消予想，Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 対応などが予想され、部分的結果が知られていた。報告者は Tom Coates 氏および Hsian-Hua Tseng 氏との以前の共同研究においてトーリック軌道体のある例に対して

クレパント解消予想を詳しく調べていたが、そこではクレパント解消予想がミラー対称性と深くかかわっていることが示されていた。特にミラーの B 模型側に現れる特異点を調べるのが極めて大切であることが分かっていた。また、高種数の理論については物理学者らによりポテンシャルの保型性が予言されており、これらを数学的に正当化することが求められていた。

2. 研究の目的

グロモフ・ウィッテン理論をミラー対称性の観点から調べ、その大域的な性質を明らかにすること。多様体間の双有理射の下でのグロモフ・ウィッテン理論の関係(関手性)を調べ、導来圏などの幾何学と結びつけること。さらに高種数理論におけるグロモフ・ウィッテン理論の保型性を調べること。またミラーに現れる新しいタイプの特異点(例えば FJRW 理論に対応するものなど)を発見し、調べること。

3. 研究の方法

種数 0 におけるミラー対称性を詳しく調べることで、B 模型側に現れる特異点を見出し、それに対応する A 模型側の幾何学を同定する。特に報告者の発見した量子コホモロジーにおける整構造と B 模型における自然な整構造の対応を見ることで、グロモフ・ウィッテン理論と多様体の導来圏とを結びつけ、また大域的な解析接続の性質を明らかにする。トーリック軌道体(あるいはその中の完全交差)のミラー対称性においては GKZ 系と呼ばれる微分方程式系を使って大域的性質を調べる。

4. 研究成果

(1) トーリック軌道体の中の完全交差に対して、ホッジ理論的ミラー対称性を示した。特に多様体の K 群から誘導される量子コホモロジーの整構造がミラー対称性の下で B 模型の自然な整構造と一致することを確かめた。また GKZ 系の自然な一般化である多重 GKZ 系が軌道体量子コホモロジーに付随する D 加群を記述することが分かった。D 加群の多重生成性は先行する Guest, 酒井氏らの論文でも(非明示的な形であるが)現れており、彼らの観察を一般化したものといえる。この成果をまとめた論文は Ann. Inst. Fourier に掲載受理された。

(2) A. Chiodo, Y. Ruan 氏らとの共同研究においては Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 対応を一般の重み付き射影空間内の Calabi-Yau 超曲面に対して調べ、種数 0 において Calabi-Yau 超曲面のグロモフ・ウィッテン理論と特異点の FJRW 理論が解析接続で移りあうことを示した。報告者が以前に導入した量子コホモロジーに対する整構造の定義を拡張して、FJRW 理論に対しても特異点の導来圏の K 群から定まる整構造を導入した。この整構造

により解析接続が Orlov の圏同値 (Calabi-Yau 超曲面の導来圏と特異点の導来圏の間の圏同値) と一致することが示された。解析接続をする際に、項目 (1) で述べた多重 GKZ 系が重要な役割を果たしている。この成果をまとめた論文は Publ. IHES に掲載が受理された。

(3) E. Gonzalez 氏との共同研究においてはトーリック多様体へのトラス作用に付随する Seidel 表現(および Seidel 元)を計算し、Seidel 表現と Givental によるミラー写像との関係を明らかにした。すなわち、Givental のミラー写像が Gromov-Witten 不変量の一種である Seidel 元によって特徴づけられる。また正則円盤の数え上げ不変量(開グロモフ・ウィッテン不変量)の母関数と Seidel 表現との関係についても部分的な結果を得た。この成果の一部は Selecta. Math. に掲載された。

(4) T. Coates 氏との共同研究においては高種数グロモフ・ウィッテン理論の可積分系的枠組みとして Fock 層の理論を調べた。高種数のグロモフ・ウィッテン理論は種数 0 の理論の量子化と考えることができ、高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルは種数 0 の理論の幾何学的量子化によって構成される Fock 空間の元(波動関数)であるとみなせる。この研究においては、まずグロモフ・ウィッテン理論の収束性について一般的な結果を得た。特に半単純で収束する量子コホモロジーを持つ多様体の高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルの収束性を示した。また Fock 層の構成についても基礎的な研究を進め、これを用いて局所射影平面のグロモフ・ウィッテンポテンシャルの保型性を示すことができる。この成果の一部はプレプリントとして公開している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1 Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology and Periods”, Ann. Inst. Fourier に掲載予定 (査読有)

2 Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani, Yongbin Ruan, “Landau-Ginzburg/Calabi-Yau

Correspondence, Global Mirror Symmetry and Orlov Equivalence” Publ. IHES に掲載予定 (査読有)

3 Tom Coates, Amin Gholampour, Hiroshi Iritani, Yunfeng Jiang, Paul Johnson, Cristina Manolache, “The Quantum Lefschetz Hyperplane Principle Can Fail For Positive Orbifold Hypersurfaces”, Math. Res. Lett., 19, 2012, 997-1005, (査読有)

4 Eduardo Gonzalez, Hiroshi Iritani “Seidel elements and mirror transformations”, Selecta Math. (N. S.) 18 (2012), no. 3, 557-590, DOI: 10.1007/s00029-011-0080-0 (査読有)

5 Hiroshi Iritani, “Ruan’s conjecture and integral structures in quantum cohomology” Advanced Studies in Pure Mathematics, 59, 2010, 111-166 (査読有)

[学会発表] (計 23 件)

1. Hiroshi Iritani, “Fock Sheaf of Givental Quantization”, UK-Japan mathematical Forum, 2013 年 1 月 23 日, 慶応大学
2. Hiroshi Iritani, 「非可換 Hodge 構造の変動に付随する Fock 空間の層について」リーマン面に関連する位相幾何学, 2012 年 9 月 1 日, 東京大学,
3. Hiroshi Iritani, “Gamma structure and functoriality in Gromov-Witten theory”, Geometry and Physics of the Landau-Ginzburg model, 2012 年 6 月 25 日, Kavli IPMU
4. Hiroshi Iritani, “Functoriality in Gromov-Witten theory”, Singularities of Equations Differentielles en Geometrie Algebrique, 2012 年 6 月 6 日, CIRM Luminy, フランス
5. Hiroshi Iritani, “Serre duality and Fourier transformation”, Motivic Structure in Quantum Cohomology, 2012 年 3 月 26 日, Max-Planck Institute, Bonn, ドイツ
6. Hiroshi Iritani, “Orlov Equivalence and quantum singularity theory” Workshop on Integrable system and mirror symmetry, 2012 年 2 月 23 日, 神

戸大学

7. Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology and Periods”, 第 10 回環太平洋幾何学会議, 2011 年 12 月 4 日, 大阪市立大学
8. Hiroshi Iritani “Global Study of Quantum D-modules”, Workshop on Equivariant Quantum Cohomology, 2011 年 9 月 16 日, 18 日, Columbia University, アメリカ合衆国
9. Hiroshi Iritani, “Fock sheaf associated to the semi-infinite Hodge variation” Kobe Workshop on Quantum Cohomology and Integrable systems, 2011 年 9 月 2 日, 神戸大学
10. Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology of Toric Orbifold Hypersurfaces and mirror period integral”, Workshop on Recent developments of orbifolds, 2011 年 7 月 25 日, Nankai university, 天津, 中国,
11. Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology and Periods”, Conference on Gromov-Witten theory, 2011 年 7 月 4 日, Institut Fourier, Grenoble, フランス
12. Hiroshi Iritani, “Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence, analytic continuation and global mirror symmetry” Derived Categories, 2011 年 4 月 13 日, Isaac Newton Institute for mathematical sciences, イギリス
13. 入谷 寛, 「トーリックスタックの大量子コホモロジーと multi-GKZ 系」 Mini workshop on Mirror Symmetry 2011, 北海道大学,
14. Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology and Periods”, New methods in geometry, 2011 年 1 月 12 日, King’s College London, イギリス
15. Hiroshi Iritani, “K-theory integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry”, 代数幾何シンポジウム, 2010 年 10 月 27 日, 城崎大会議館, 城崎
16. 入谷 寛, Gromov-Witten 理論における整構造, 日本数学会(幾何学分会特別講

演), 2010年9月22日, 名古屋大学

17. Hiroshi Iritani, “Hodge Theory of Landau-Ginzburg model and its quantization”, Summer School on mirror symmetry, 2010年6月21日-25日, KIAS, ソウル, 韓国

18. Hiroshi Iritani, “Matrix factorization and enumeration of spin curves”, Workshop on Geometry and Physics of the Landau-Ginzburg model, 2010年6月1日, Institut Fourier, Grenoble, フランス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

入谷 寛 (Iritani Hiroshi)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: **20448400**

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: