様式Ｃ－１９

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月３１日現在

機関番号：３２６６１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2011
課題番号：22740044
研究課題名（和文）　バーコフ切断によるアノソフ流の位相的研究

研究課題名（英文）　Topology of Anosov flows and Birkhoff sections

研究代表者
野田　健夫（NODA TAKEO）
東邦大学・理学部・講師
研究者番号：90431618

研究成果の概要（和文）：　3次元多様体上の推移的なアノソフ流は曲面の擬アノソフ写像の懸垂流に対し、有限個の周期軌道でデーン手術を施したものとして記述することができる。このときもとの曲面の3次元多様体における像をバーコフ切断とよぶ。このバーコフ切断を通して3次元多様体上のアノソフ流の位相を理解することを試みる。釜谷・児玉・野田はBonatti とLangevinの例に対して種数0のバーコフ切断を構成することに成功していた。今回はさらに、同じ流に対して種数1のバーコフ切断の存在を調べた。

研究成果の概要（英文）： Transitive Anosov flows on 3-manifolds can be described as ones obtained by Dehn surgeries from suspension flows of pseudo-Anosov maps of surfaces. The images of such surfaces in 3-manifolds are called Birkhoff sections. We try to understand the topology of Anosov flows on 3-manifolds using Birkhodd sections. In the work of Kamatani, Kodama and Noda, a Birkhoff section of genus 0 has been found for the Bonatti-Langevin example of Anosov flow. In this work, we study the existence of Birkhoff sections of genus 1 for the same flow.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2010年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2011年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・幾何学
キーワード：　位相幾何学・葉層構造・力学系・安定葉層・多重葉層構造

## １．研究開始当初の背景

微分方程式の研究は古くから盛んに行われてきたが、求積法により厳密解の得られる系はごく一部であり、近年では計算機シミュレーション技術の発達も相俟ってより幅広い方程式系を対象とした定性的研究が重要視されている。その中でも位相力学系理論は一般にn次元多様体上にベクトル場として定義される常微分方程式の解の挙動の位相幾何学的性質を研究する分野であり、力学系の基礎をなす重要な分野の一つである。

位相力学系における典型的な研究対象は**双曲性**をもった力学系であり、微小変動によって解の定性的性質が変化しないという**構造安定性**と呼ばれる特質を有する。特に多様

体のいたるところで双曲性が成立する力学系が D. V. Anosov によって定式化され、考察する時間パラメータが離散的・連続的の場合に応じてそれぞれ**アノソフ写像・アノソフ流**とよばれている。

アノソフ写像が定義されうる最低の次元である 2 次元においては早くから分類が完成しており、本質的にはトーラス上の双曲的自己同相写像と同値になる。一方アノソフ流が定義される最低の次元は 3 次元であり、この場合アノソフ流は拡大・縮小傾向を有する 2 種の曲面族の交わりに存在することがわかる(これらの曲面族はそれぞれ**安定葉層・不安定葉層**とよばれる)。こうした曲面族の交わりという観点から E. Ghys, T. Barbot, S. Fenley らによっていくつかの部分的な分類定理が得られてきたが、完全な分類に至るまではまだ遠いのが現状である。しかし 3 次元多様体上のアノソフ流の特徴付けは力学系の重要例としてのみならず、空間の性質を強く反映するため 3 次元微分位相幾何学の観点からも非常に興味深く、その性質の解明が周囲に与える影響は少なくない。

より高次元の場合とは異なり、3 次元のアノソフ流では**推移性**(一つの軌道が多様体のほぼいたるところを通過するという性質)が必ずしも成立しないという特色がある。推移性を持たないアノソフ流は推移性を持つ部分集合である**極小集合**に分解され、その性質は極小集合の研究に還元される。そこで以下では全体が基本単位とみなせる推移的なアノソフ流の研究に話題を限定する。

推移的アノソフ流の代表例はアノソフ写像の懸垂流と双曲曲面の測地流である。前者においてはすべての軌道に横断的に交わる**大域切断**とよばれるトーラスが存在し、流はトーラス上のアノソフ写像の時間パラメータを自然に連続化したものとみなされる。後者の測地流には大域切断は存在しないのだが、G. Birkhoff は有限個の周期軌道を除いて他のすべての軌道が横断的に交わる曲面の例を構成し、全く性質が異なるかに見える懸垂流との関係を明らかにした。このような性質を持つ曲面は後に**バーコフ切断**とよばれ、D. Fried によってすべての推移的アノソフ流に存在することが示されている。すなわち推移的アノソフ流はバーコフ切断を通して曲面上の離散力学系に還元されるのである。

バーコフ切断に関する最大の問題は J. Christy によって提起された『任意の推移的アノソフ流は種数 1 の(すなわちトーラスに同相な)バーコフ切断を許容するか否か』というものであり、言い換えれば推移的アノソフ流は有限個の周期軌道を除いてアノソフ写像に還元され得るかを問題にしている。この問題が肯定的にせよ否定的にせよ解決すれば、アノソフ写像とアノソフ流の関係の解明が大幅に前進し、アノソフ流の分類にも大いに貢献するはずである。しかしバーコフ切断は具体的な構成が難しく、また一意的に決定するわけでもない。研究開始当初は明示的にバーコフ切断が知られている多様体では種数 1 のものを選ぶことができる、といった程度の状況証拠しか手掛かりがなかった。

私は研究開始時点までの研究で互いに交わる曲面族(**多重葉層構造**)の観点からアノソフ流を一般化した射影的アノソフ流の分類問題を手掛け、また 3 次元多様体の多重葉層構造の具体的構成を集中的に扱ってきており、3 次元多様体上のアノソフ流の分類にはずっと興味を抱いてきた。そうした中で釜谷・児玉との共同研究で私は C. Bonatti と R. Langevin によるアノソフ流の例に対して種数 0 の(すなわち球面に同相な)バーコフ切断を具体的に構成して同種の例を一般化し、この具体例を契機に Christy の問題への 1 つのアプローチをすることができるのではないかと考えていた。

２．研究の目的

3 次元多様体上の力学系の位相的側面からの研究として、特に推移的なアノソフ流をバーコフ切断の観点から解明することを目指す。より具体的に、前項に述べた背景に基づき、以下の 2 つの問題へのアプローチを目的とする:

(1) 釜谷・児玉・野田のアノソフ流はさらに種数 1 のバーコフ切断も許容するか。
(2) 流に交わるが大域切断にはならない種数 1 の曲面の特徴付け。

問題(1)は否定的に解決すれば Christy の問題の反例になるし、肯定的だとしても種数の異なるバーコフ切断が同一多様体上に存在するという例はバーコフ切断の理解を深めることに貢献するだろう。

問題(2)のような曲面は Bonatti-Langevin の例およびそれを一般化した私と釜谷・児玉とのかつての共同研究の成果に自然に表れ、高々有限個の閉軌道に交わらないため大域切断になりえないことが分かっている。このような曲面の性質と、曲面に交わらない閉軌道の局所的な構造が理解されれば、大域切断にならない曲面をバーコフ切断に変形する方法につながるのではないかと考えている。

以上より、本研究はこれまで明確な成果の少なかった Christy の問題に貢献することが予想され、さらには 3 次元多様体上のアノソフ流の理解にもつながるものであると考えている。

３．研究の方法

研究目的に記した２つの問題について、さらにいくつかの手法に分けてアプローチを試みる。

(1) 釜谷・児玉・野田の種数０のバーコフ切断を持つアノソフ流は種数１のバーコフ切断も許容するか

この問題については以下に挙げる３つの観点から研究を進める。

① 種数０のバーコフ切断を許容するアノソフ流の研究

釜谷・児玉・野田のアノソフ流の例は種数０のバーコフ切断を持つので、構成的に見直せば２次元球面の擬アノソフ自己同相写像と呼ばれる写像の懸垂流から、有限個の周期軌道でデーン手術という局所的操作をほどこして得られたものとして記述しなおすことができ、またその自己同相写像はデーン手術をほどこした周期軌道のなす閉組紐によって表される。

そこでまず流に横断的に交わる曲面（特に２次元トーラス）の有無、そして存在する場合はその位置関係について調べる。そのような曲面は閉組紐の補空間内の圧縮不可能曲面から導かれるが、これについては佐伯真一の研究（未発表）などによりいくつかの場合には分類されており手がかりとなる情報がある。こうした情報を元に流に横断的に交わる曲面の存在とその種数を調べ、特に種数１の曲面（すなわちトーラス）が存在する場合その曲面を変形してバーコフ切断にできるか否かを模索する。

以上のアプローチは始めに種数０のバーコフ切断を持つアノソフ流を用意しそこに種数１のバーコフ切断を探すものであるが、逆に種数１のバーコフ切断を持つアノソフ流に対し種数０のバーコフ切断の構成を試みるという方向もある。最も簡単な例はトーラスのアノソフ写像の懸垂流であるが、この場合でも種数０のバーコフ切断を許容するかどうかはまだ分かっていない。いくつかの具体例に対して計算を重ねることからはじめ、一般法則に向けた問題の所在を明確にしていく。

② 新たなバーコフ切断の具体例の構成

推移的なアノソフ流にバーコフ切断が常に存在することは示されているが、具体的な構成例が知られていないアノソフ流の例もまだたくさんある。研究の初期段階ではとにかく具体例を豊富に構成することも絶対必要となるであろう。J. Franks と B. Williams の論文は推移的でないアノソフ流の構成を論じたものではあるが、同じ方法で推移的なアノソフ流を作ることもできる。こうした例のバーコフ切断の構成法も考察する。

③ バーコフ切断の取替え操作

バーコフ切断によるアノソフ流の研究を困難なものにしている要因として、一つのアノソフ流に対して複数のバーコフ切断が存在すること、そしてそれぞれのバーコフ切断の相互の関係について一般理論がほとんど何も分かっていないことがあげられる。こうした状況を打破するには異なるバーコフ切断への取替え操作を明確にすることが必要である。つまり、バーコフ切断に施すことのできるある有限種の操作を確定し、その操作によって得られる曲面はすべてバーコフ切断であり、また任意のバーコフ切断はそれらの操作により互いに移りあうということが示せればよい。こうした操作が分かれば以降の議論は多くが組み合わせ論的に行うことができ、さまざまな性質の検証の一部は計算機アルゴリズムによって処理可能となることも期待される。

(2) 流に交わるが大域切断にはならない種数１の曲面の特徴付け

種数１の曲面はトーラスともいわれる。推移的なアノソフ流で、流に横断的に交わるトーラスを持ちながら懸垂流と位相共役でないものについて研究する。懸垂流でないため横断的トーラスは大域切断ではないが、推移性からこのトーラスと交わる軌道の和集合は稠密になる。他方バーコフ切断はすべての軌道と交わるが境界において横断的でなくなるという性質を持つため両者を比較し位置関係を明らかにすることはバーコフ切断の特徴づけにおいて非常に重要な点となる。

この条件を満たすアノソフ流の例は Bonatti-Langevin の例のほかに M. Brunella による構成法や Franks と Williams の手法を応用したものが知られているが、それぞれの例では安定および不安定葉層を横断的トーラスに制限したときできる葉層が位相的に異なる。この違いは当然バーコフ切断上に導かれる擬アノソフ自己同相写像の不変葉層にも現れるはずで、更にはバーコフ切断の位相的情報を与えることも期待されるので注意深く研究を進める。

また流に横断的に交わるが大域切断ではないトーラスと交わらない軌道についてもその存在条件を精密に調べたい。たとえば Bonatti-Langevin の例ではそのような軌道は閉軌道が一つあるのみで、他の軌道はすべてトーラスに交わっている。このような軌道を仔細にしらべて存在条件を特徴づけ、それが局所的に実現可能なのであれば大域切断

あるいはバーコフ切断を回避する軌道を挿入する、といった操作が考えられるので種数の低いバーコフ切断を持たないアノソフ流が構成できるかもしれない。逆にこの種の軌道の存在が流の大域的性質に関係しているのであればバーコフ切断の種数が制御しづらいということが分かる。

４．研究成果

3次元多様体上のアノソフ流について：

(1) 種数０のバーコフ切断を許容するアノソフ流
(2) アノソフ写像の懸垂流としては表わせないが流に横断的なトーラスを許容するアノソフ流の例

の２つについて調べた。

特に、Bonatti-Langevinによるアノソフ流の例は(2)の性質をみたす例として提示されていたものであるが、なおかつ(1)の性質も持つことが釜谷・児玉との過去の共同研究で知られていた。この例に対しては、既に相異なる2つの種数0のバーコフ切断を構成しており、両者の定める擬アノソフ写像の関係についても調べていた。この度はさらにこれらの一方にある操作を施すことによって新たに種数1のバーコフ切断を構成することに成功した。この操作は、周期軌道を境界として持つ2穴あき円板を既にあるバーコフ切断に貼り合わせることにより新たなバーコフ切断を生み出すもので、構成法から種数は不変であるかあるいは増加する。種数を制御する一般論を導き出すにはまだ至っていないが、推移的なアノソフ流には周期軌道が稠密に存在することからこの操作を適用することにより多様なバーコフ切断の変形が期待され、また実際に数式で明示的に与えられた他のアノソフ流の具体例に対してもバーコフ切断の取り換えを観察できている。

また、(2)の性質のみを持つアノソフ流の例の構成も試みた。まず、測地流の有限個の閉軌道についてデーン手術を行って得られる一連の例がある。他にFranks-Williamsによる非推移的アノソフ流の構成法を応用して、流に横断的なトーラスを許容しつつ推移的であるような例についても考察した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① M. Asaoka, E. Dufraine & T. Noda, Homotopy classes of total foliations. Commentarii Mathematici Helvetici. 査読有, Vol. 87, 2012, 271～302.
DOI: 10.4171/CMH/254

６．研究組織
(1)研究代表者
野田　健夫（NODA TAKEO）
東邦大学・理学部・講師
研究者番号：90431618

(2)研究分担者
該当者なし

(3)連携研究者
該当者なし