様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 15 日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２０１０～２０１１
課題番号：２２７４００４９
研究課題名（和文）３次元多様体のオープンブック分解の研究

研究課題名（英文）A research of open book decomposition of 3-manifolds

研究代表者
山本　亮介（YAMAMOTO　RYOUSUKE）
群馬大学・教育学部・准教授
研究者番号：８０４４５００６

研究成果の概要（和文）：我々の先の研究で定義されたオープンブック分解の複雑度と、オープンブック分解の既に知られている不変量との比較を様々に行う中で、Alexander 多項式（同じことであるが、Conway 多項式）が持つ幾何的な側面が、複雑度（こちらも幾何的に定義されたものである）との関係を見出す上で有効に働くことが明らかになった。さらに、Alexander 多項式を与えるところの 写像類群の Siegel 表現の発展物である Johnson-Morita 表現を利用して不変量を構成することで、複雑度をより精密に評価できるであろうという予測を得た。

研究成果の概要（英文）：It has become clear that the Alexander polynomial (equivalently the Conway polynomial) of open book decompositions plays an effective role for an estimation of the complexity of open book decompositions, which we defined in our previous research. From this observation, we have obtained a prediction that the Johnson-Morita representation of the mapping class group of the fiber surface of an open book decomposition will be useful to constract a new invariant of open book decomposition which gives us stricter estimation of the complexity than the Alexander polynomial.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：3 次元多様体論
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：3 次元多様体、オープンブック分解、Alexander 多項式

１．研究開始当初の背景
有向閉 3 次元多様体の研究として、与えられた 3 次元多様体が許容するオープンブック分解の構造から、元の 3 次元多様体の位相的な大域的構造を解析するという方向の研究が着実に積み重ねられており、3 次元多様体論の他の分野（Heegaard 分解の理論、接触幾何学等々）との関わりも、いくつも発見されてきていた。

２．研究の目的
有向閉３次元多様体のオープンブック分解の構造として、そのファイバー曲面の村杉和に関する分解の構造に注目し、与えられたファイバー曲面がどのような村杉和分解を許容するのかを判定する方法の確立を最終目的とし,そのための第１段階として本研究では、先の研究で定義されたオープンブック分解のある種の複雑度（村杉和分解可能性と密接な関係があることが示されている）を評価する不変量の発見を目指した。

３．研究の方法
上記のオープンブック分解の複雑度に対し、オープンブック分解の既に知られているいくつかの不変量(Alexander 多項式、対応する接触構造から得られる量、等々）との比較を行なった。続いて、Alexander 多項式の有効性が確認された後は、Alexander 多項式が持つ情報とオープンブック分解のファイバー曲面上のモノドロミー写像が持つ情報との比較を行い、オープンブック分解の複雑度を評価するためには、どのような情報が必要であるかを調べた。

４．研究成果
（１）オープンブック分解の Alexander 多項式とオープンブック分解の複雑度との関係の研究について。

(1.1) オープンブック分解の Alexander 多項式とは、オープンブック分解のモノドロミー写像から定義されるオープンブック分解の不変量である。この不変量が、オープンブック分解の複雑度を評価する上で、有効な性質を持つことが少しずつ明らかになってきた。

　オープンブック分解の複雑度は、ファイバー曲面上のプロパーアーク（両端点が曲面の境界上に乗っているアーク[曲線分]）とそのモノドロミー写像による像との間の幾何的交点数の最小値として定義されている。一方、先行する研究において、オープンブック分解の Alexander 多項式の各係数と、オープンブック分解のファイバー曲面上のアークシステム、すなわち、曲面上のいくつかのプロパーアークの集合で、このアークたちで曲面を切り開くと１つの円板となるというもの、とそのモノドロミー写像による像との間の代数的交点数たちとの関係を明らかにしている。これより特に、曲面上のアークシステムとそのモノドロミー写像による像との間の代数的交点数たちから Alexander 多項式と同値な不変量であるところの Conway 多項式を計算する公式を得ている。このような公式が得られることから、Alexander 多項式、または同値であるところの Conway 多項式はオープンブック分解の複雑度を計る上で有効であると考えられる。(ただし、オープンブック分解の複雑度を定義しているのは、ファイバー曲面上のアークの幾何的交点数たちであるのに対し、Alexander 多項式を定めているのは代数的交点数である。この誤差に関する考察については後述する。)

　本研究では、上記のファイバー曲面上のプロパーアークの代数的交点数と Conway 多項式との間に、さらに詳細な対応が明らかにされた。すなわち、以下に述べるように、オープンブック分解の Conway 多項式の情報から、ファイバー曲面上の任意のプロパーアークとそのモノドロミー写像の像との間の代数的交点数を求める方法を得た。

　ファイバー曲面 S に対して、S 上のプロパーアーク a に沿って以下の図１に示すような曲面を合成する操作をトレフォイル・プラミングと呼ぶ。このとき、以下の定理の成り立つことを証明した。

図１　トレフォイル・プラミング

<u>定理.</u> 種数 g のファイバー曲面S上のプロパーアークaに沿ったトレフォイル・プラミングによりファイバー曲面S’を得たとする。SのConway多項式をPとし、S’のConway多項式をP’とする。このとき、Pの 2g-2 次の係数とP’の 2g次の係数との差が、アークaとそのモノドロミー写像による像との代数的交点数 − 1 に等しい。

この定理の系として、以下を得ている。

<u>系.</u> 3 次元球面のオープンブック分解のファイバー曲面S（種数gとする）とその上のプロパーアークaについて、Sをaで切り開いた曲面の境界が成す 3 次元球面内の絡み目をLとする。ことのき、Lの（絡み目としての）Conway多項式の 2g-1 次の係数は、アークaとそのモノドロミー写像による像との代数的交点数に等しい。

(1.2) 前節に述べたオープンブック分解の Alexander 多項式の計算方法、すなわち、ファイバー曲面上のプロパーアークとそのモノドロミー写像の像による代数的交点数たちから計算する方法を精査することで、以下に述べるような、Alexander 多項式の新たな側面を発見した。

代数的交点数たちの情報からAlexander多項式を計算する過程や結果からは、直接的にはAlexander多項式の各係数と代数的交点数たちとの関係は見えてこない。このことへの対応として、Alexander多項式からConway多項式へと変換することが有効であることを先の研究で示していた。この結果、Conway多項式の各係数は、ファイバー曲面上のアークシステムとそのモノドロミー写像による像が成す代数的交点数たちを並べた行列のいくつかの小行列のパフィアンと呼ばれる値の和として与えられることが示されている。

この変換の過程を整理し直すことで、オープンブック分解の Conway 多項式の新たな表現方法を以下のように発見した。

種数ｇのファイバー曲面Ｓの第１ホモロジー群Ｈから生成される２次外積代数を考える。ファイバー曲面上のプロパーアークとそのモノドロミー写像による像との間の代数的交点数を並べて得られる行列から、この２次外積代数上の２次形式への自然な対応がある。そうして得られる２次形式をＡとする。また、自明なモノドロミー写像に対応する２次形式をＩとし、変数ｚを用いて、ｚI-Aなる２次形式を構成すると、この２次形式　ｚI-Aの(外積による）ｇ乗により2g形式を得るが、その係数として Conway 多項式が現れることを示した。外積代数上で考えることが自然であるのは、代数的交点数、すなわち、H 上の交点形式が交代的であることと密接に関係する。Conway多項式のこの構成法によって、先に述べた（比較的複雑な）パフィアンの計算が、2 次形式の（外積による）g 乗に翻訳されたのである。また、Conway多項式がオープンブック分解の不変量であることも比較的シンプルな形で表現される。つまり、オープンブック分解とは、そのモノドロミー写像（のアイソトピー類）によって定まるが、共役をとっても、同じオープンブック分解を定める。すなわち、オープンブック分解は、モノドロミー写像が属する写像類群の共役類によって定まる。従って、オープンブック分解の不変量とは、写像類群の共役類の不変量である。このような見方において、Conway多項式が元のモノドロミー写像の共役により不変であることが、Conway多項式をＨから生成される2次外積代数上の2次形式として表現することで自然に理解されることが明らかになったのである。

（２）オープンブック分解のAlexander多項式以外の既知の不変量とオープンブック分解の複雑度との比較の研究について。

(2.1) 有効閉 3 次元多様体のオープンブック分解に対応する接触構造に注目し、接触構造上に現れるいくつかの量や性質と元のオープンブック分解の複雑度との比較を行なった。しかし、オープンブック分解に正ひねりのホップバンドをプラミングにより付け外しをしても、対応する接触構造は変わらないことから、接触構造のもつ情報とオープンブック分解の構造とに単純な一対一対応が付きにくい。この事実が障害となり、この両者の間には、複雑度を評価する上で有効な関係を見出すことはできなかった。

例えば、オープンブック分解のファイバー曲面から負ひねりのホップバンドをプラミングにより取り外すことができるならば、対応する接触構造は overtwisted と呼ばれる構造をもつこととなるが、逆は正しくない。つまり、対応する接触構造が overtwisted であっても、元のオープンブック分解のファイバー曲面から負ひねりのホップバンドを取り外しできるとは限らず、ただ言えることは、そのファイバー曲面から負ひねりのホップバンドを取り外しできるファイバー曲面へと、正ひねりのホップバンドの付け外しを繰り返して変形できるということだけであり、さらに、この正ひねりのホップバンドの付け外しの操作がどのように行われるのかは不明のままなのである。現在は、この困難点を克服するための研究を継続している。

(2.2)　3 次元球面のオープンブック分解に限定すれば、オープンブック分解のファイバー曲面の境界は、3 次元球面内のファイバー結び目を成す。そこで、数多く知られている結び目の不変量の中に、オープンブック分解の複雑度との間に複雑度の評価に利用できそうな関係を持つものが発見できないかと考えたが、後述するAlexander多項式以外には、目的に適う不変量の発見には至らなかった。

（３）オープンブック分解の複雑度をより精密に評価する不変量の構成に向けた研究について。

先に述べたように、我々の定義したオープンブック分解の複雑度は、ファイバー曲面上のアークとそのモノドロミー写像による像との幾何的交点数によって定められる量である。よって、代数的交点数により定まるAlexander 多項式では、複雑度に関するある程度の幾何学的な見地は得られても、精密な評価は得られない。そこで、Alexander 多項式の持つ、ファイバー曲面上のアークたちのなす幾何との親和性はそのままに、Alexander 多項式が捉えられない情報を汲み取る新たな不変量の構成が必要である。

先に述べた、Conway多項式の不変量として

も性質、すなわち、元のモノドロミー写像の共役により不変であること、がファイバー曲面の第１ホモロジー群が生成する２次外積代数上で自然に理解されることを応用することで、Alexander 多項式の延長線上に位置する新しい不変量を構成できるであろうという予測を以下のように得ている。

オープンブック分解のモノドロミー写像をファイバー曲面上の写像類群の元であると見なす。Alexander 多項式は、写像類群の Siegel 表現より得られるが、この Siegel 表現が汲み取れない情報を汲み取る表現として、Johnson-Morita 準同型と呼ばれる表現が構成されている。写像類群のこの表現による像から、オープンブック分解の不変量を構成することで、オープンブック分解のファイバー曲面上のアークたちの幾何的交点数をできるだけ精密に捉える方法を構築できると考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計１件）
山本 亮介、Conway polynomial of open books、東京女子大学トポロジーセミナー、2011.7.16、東京女子大学

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山本　亮介（YAMAMOTO　RYOUSUKE）
群馬大学・教育学部・准教授
研究者番号：８０４４５００６

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：