様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１２６１４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２７４００５７

研究課題名（和文）産業数学への応用を通した変分解析の再構築

研究課題名（英文）Reconstruction of variational analysis through industrial mathematics

研究代表者
関口　良行（Sekiguchi, Yoshiyuki）

東京海洋大学・海洋科学技術研究科・准教授

研究者番号：５０４３４８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円、（間接経費）　990,000円

研究成果の概要（和文）：変分解析における距離正則性に対して，関数解析的手法による定量解析と Banacha 空間上の不等式系に対する距離正則性に関する研究，および多項式最適化問題の大域最適解を求めるアルゴリズムに対する理論研究を行った．主な研究成果は以下の通りである．
1．連続関数空間上の不等式系に対して，正則性のモジュラスの公式をお与えた．2．SRPT スケジューリングアルゴリズムに対して，関数最適化の手法を応用し，アルゴリズムの評価を改善した．3．多項式最適化問題の大域最適解を求めるアルゴリズムは，半正定値計画問題を生成する．それらの半正定値計画問題が強双対性を持つため十分条件を得た．

研究成果の概要（英文）：We considered quantitative analysis of metric regularity in variational analysis and inequality systems on Banach spaces by functional analytic methods. In addition, we studied theoretical properties of a algorithm for obtaining a global minimum of polynomial optimization problems. Our main results are the following:
1. We gave a formula for modulus of regularity of inequality systems on the space of continuous function.
2. We improved estimates of performance of an SRPT scheduling algorithm by optimization methods in function spaces. 3. An algorithm for obtaining a global minimum of polynomial optimization problems generates a sequence of semidefinite programming problems. We gave sufficient conditions for such semidefinite programming problems to have strong duality properties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：変分解析　最適化理論　関数解析　代数幾何

１．研究開始当初の背景

本課題では産業数学への応用研究を通じて、変分解析をより適用範囲の広い理論へ再構築する。

変分解析は微分不可能な関数、汎関数の局所的な性質を、一般化微分などを用いて直接解析する手法である。既存の研究では、「微分不可能な関数一般」という、産業数学にとっては一般的すぎる対象を扱っていて、理論が煩雑になりすぎている。しかし工学に現れる最適化、微分方程式には、微分不可能な汎関数などが現れても、一般に扱い易い構造がある。そのような構造を実代数 幾何、Tame 位相を利用して、産業数学に現れる最適化問題、微分方程式の中に発見し、変分解析の理論に取り入れていく。

２．研究の目的

(1) 産業数学にしばしば現れる最適化問題には、古典的な解析学で扱われてきた問題と異なる特徴がある。選択肢が何らかの範囲内にあることを表現するために不等式系を用いることと、最適解が領域の尖った点(境界の微分不可能な点)に現れ得るところである。不等式系を詳細に解析するために、近年、Lassere、Lewis、Ioffe などにより、実代数幾何と変分解析、最適化理論を結びつける研究が始められた。従来の代数幾何と違い、実代数幾何は実係数多項式または解析関数からなる不等式系の実数解を解析する強力な道具を持つ。

多項式を制約式、目的関数に持つ最適化問題は産業数学で良く現れるにも関わらず、単に非線形最適化問題として扱われ特別な注目を受けずにいた。しかし、大域最適解を高速に求めるアルゴリズムが Lasserre などにより発見され、その応用の幅広さから近年盛んに研究されている。我々はこのアルゴリズムの解析に実代数幾何を応用し、制約式から生成される二次加群の性質をイデアルの性 質を調べることで解析し、アルゴリズムの収束条件を発見した。現在はその条件 をより具体的に判定可能なものに置き換える研究を進めている。

(2) 微分不可能な対象を局所的に解析するための強固な数学理論を作るには、境界が激しく振動しているような病的な集合を除外する必要がある。実代数幾何は、Tame 位相(穏やかな位相)と いう病的な集合を除外するための数学構造を持つ。例えば、変分解析に Tame 位相を取り入れることで、劣解析的リプシッツ写像がモース・サード持つことが解明されたのは代表的な成果である。多項式最適化問題に関する研究を発展させ、Tame 位相と変分解析の融合を目指す。

(3) 線形計画問題は産業数学の様々な分野で現れる基本的な問題である。線形計画問題を解く代表 的なアルゴリズムである内点法は Renegar などにより詳細な計算量の解析が行われている。しかし、従来の計算量解析は密な行列に対するものであり、現実の問題が持つ疎性や対称性などの構造を考慮していない。このことから、申請者は制約式に対して疎性などの構造を保つような摂 動を考えることが有効的だと考え、制約式を定義する写像の構造を考慮した条件数について研究しており、論文を執筆中である。この研究をさらにすすめ、条件数と固有値や特異値などとの関係の解明を目指し、一般の写像に対する構造を考慮した摂動定理の基礎を築く。

(4) 理論計算機科学の研究は主に離散数学やグラフ理論が応用されてきたが、申請者は変分解析、 連続最適化理論の応用に注目している。実際、理論計算機科学者との共同研究で、変分法を通貨 交換問題に応用し効果的なアルゴリズムを考案することに成功した。その研究では既存のアルゴ リズムの弱点を補うために、問題を *L1* 上の変分問題として新たな定式化を行い、不連続な最適解(アルゴリズム)を解析的に求めることに成功した。結果は J. Comb. Optim. に掲載予定である。これはアルゴリズム設計に変分法、変分解析を応用した画期的な結果であり、本研究では同様の手法を他の計算機科学の問題に適用する。

(5) 変分解析は、従来の手法では解析し難かった物理モデルに対して有効なときがある。例えば、 歪みに対して最も強い柱を設計する問題である。その問題は 4 次の自己共役微分作用素の最小固有値を最小化する問題として定式化される。従来の手法では問題を扱いやすくするため、最小固 有値が単純であるという人工的な仮定していた。それは固有値は単純だとパラメータに関して微 分可能だが、多重だと微分不可能になってしまい従来の手法では解析できなかったからである。 この問題は 1992 年に Cox と Overton によって微分不可能な固有値を変分解析によって直接 解析することで解決された。微分不可能な汎関数は一般に扱いづらいが、物理的に意味のある問題には微分可能性とは異なる数学的に良い構造が含まれている場合が多い。申請者は、物理的に意味のある仮定下で微分不可能な汎関数が自然に現れる問題を変分解析を用いて解析する。

３．研究の方法

(1) 「多項式最適化問題と多項式環上の二次加群についての研究」で対象とするアルゴリズムは、 多項式最適化問題から半正定値計画問題の列を生成し、それらの解を内点法によって求めること で、元の問題の大域最適解を得るというものである。その際、内点法が収束するためには、半正 定値計画問題の最適値とその双対問題の最適値が一致する(強双対性)ことが必要である。強双対性が成り立つには、元の多項式最適化問題の制約式から生成される二次加群の性質

が重要であることが分かっている。申請者は最近その二次加群の性質が、制約式の一部から生成されるイデアルの条件で表 せ ることを発見した。その研究をさらに進め、より具体的に判定可能な条件に書き換えることを目指す。また、特殊な構造を持つ多項式最適化問題に対しては、有限個の半正定値緩和問題を解くこと で、元問題の解を得ることができる。この構造をヒルベルトの第 17 問 題 か ら始まった多項式の自乗和に関する問題と関連づけて研究する。研究は、数値解析的な結果を参照しながら、数式処理ソフトによる具体例の作成、結果の検証を積極的に行うことで、研究の円滑な進行を図る。そのため、ディスクトップを一 台 購 入する。 また、最適化、実代数幾何の書籍を購入する。

(2)「変分法によるアルゴリズム設計」の研究では計算機科学の基本的な問題を変分法、変分解析の立場 から見直す。申請者は今まで、オンラインアルゴリズムの基本的問題である通貨交換問題で変分法によるアルゴリズム設計に成功している。これはある通貨を一定期間内に両替するとき、レー トの変動が全く分からない状況下で、どのようなアルゴリズムで通貨を交換していけば良いか、という問題である。これを *L1* 上の変分問題に変換し、不連続な最適解(アルゴリズム)を解析的に求めることに成功した。また、この結果を従来の結果と比較するためミニマックス問題を考え、戦略集合がコンパクトでない状況下で、鞍点として不連続関数と跳躍のある分布の組みを解 析的に求めることに成功している。他の問題に対しても同様の手法を試み、既存のアルゴリズムの改良、手法自体の改良について研究する。研究はシミュレーションにより解を予想し、その知見をもとに解析解を探すことによって進める。これらの研究のため、計算機科学の書籍を購入し、国内外のセミナー、研究集会等に積極的 に参加し、得られた結果を国際学会などで発表する。

４．研究成果

(1) 線形不等式系を表す写像に対して、正則半径の定理が成り立つための具体的でシャープな十分条件を得た。その際、具体的にルベーグ二乗可積関数空間上の不等式系の反例を挙げ、その十分条件を取り除くことが出来ないことと、そのような性質の悪い不等式系に対しても、我々が得た公式が成り立つことを示した。

さらに、この結果を連続関数空間上の可微分な非線形不等式系に応用した。そこでは、連続関数空間の双対空間である有界変動関数空間の単位球面の部分集合が汎弱コンパクト性を持つことに注目し、Fan のミニマックスの定理を用いることで、正則性のモジュラスの等式評価と、正則半径の定理が成り立つことを証明している。

(2) オンラインアルゴリズムの古典的問題である通貨交換問題を拡張し，関数空間上の変分問題として定式化し直した．関数最適化の手法を応用し，新しい効果的なアルゴリズムを得た．さらにゲーム理論的な考察により，従来のアルゴリズムと新しく求めたアルゴリズムとの関係性を解明した．また，議論に用いたゲームの均衡解を解析的に求めることに成功した．

(3) SRPT アルゴリズムとは比較的単純なオンラインジョブスケジューリングに関するアルゴリズムである。本論文では SRPT アルゴリズムの解析に，関数空間上の最適化理論を応用し，オンラインアルゴリズムの評価尺度である競合比を厳密に評価した．証明では，関数空間上の線形計画問題に対する相補性条件が鍵となっている．

(4) 多項式のみからなる最適化問題は多項式最適化問題と呼ばれる．本論文では，多項式最適化問題の大域最適解を求める Lasserre 緩和法が生成する半正手値計画に対して，強双対定理が成り立つための十分条件を，実代数幾何の概念である実イデアルを用いて記述した．その中で，イデアルが実イデアルである為の条件について，新たに初等的な証明を与えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）

① <u>Y. Sekiguchi</u>, T. Takenawa, H. Waki, Real ideal and the duality of semidefinite programming for polynomial optimization, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,* 30, 321-330 (2013)

② H. Fujiwara, <u>Y. Sekiguchi</u>, An improved analysis of SRPT scheduling algorithm on the basis of functional optimization, *Information Processing Letters,* 112, 911-915 (2012)

③ H. Fujiwara, K.Iwama, <u>Y.Sekiguchi</u>, Average-case competitive analyses for one-way trading, *Journal of Combinatorial Optimization,* 21, 83-107 (2011)

④ <u>Y. Sekiguchi</u>, Exact estimates of the regularity modulus for infinite programming, *Mathematical Programming,* 123, 253-263 (2010)

〔学会発表〕（計　5　件）

① <u>Y. Sekiguchi</u>, Real ideal and duality, Mathematics, Algorithms and Proofs 2012, Young researcher’s session, 2012 年 9 月 18 日, Konstanz, Germany

② <u>関口良行</u>，凸代数幾何と最適化理論，Mathematical Economics Monday

Seminar in Keio University, 2012 年 4 月 16 日, 東京

③ Y. Sekiguchi, Real ideal and duality related to polynomial optimization, Optimization: theory, algorithms and applications in economics, Barcelona, 2011 年 10 月 27 日

④ 関口良行, （招待講演）無限次元変分解析の理論とオンライン アルゴリズムにおける応用例, Ramp シンポジウム, 2010 年 10 月 29 日, 名古屋

⑤ Y. Sekiguchi, Real ideal and duality related to polynomial optimization, *Mathematical Economics Monday Seminar in Keio University*, 2010 年 4 月 19 日, 東京

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
関口 良行（SEKIGUCHI YOSHIYUKI）
東京海洋大学・海洋科学技術研究科
准教授
研究者番号：50434890

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：