様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月１６日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010～2012
課題番号：22740058
研究課題名（和文）　反応拡散系近似理論の発展と応用

研究課題名（英文）　Development and application of the theory of reaction-diffusion system approximation

研究代表者
村川　秀樹（HIDEKI MURAKAWA）
九州大学・数理学研究院・助教
研究者番号：40432116

研究成果の概要（和文）：理工学分野において現れる様々な問題を含む非線形拡散問題を取り扱った。非線形拡散を含む問題の解析や数値解析において、拡散の非線形性をどのように扱うかが問題となっている。本研究では、半線形問題である反応拡散系の解により非線形拡散問題の解を近似する、反応拡散系近似理論に焦点を当てた。急速反応極限の考察、反応拡散系近似の解析、その数値解析や数理モデリングへの応用等、多角的に研究を行い、様々な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We dealt with nonlinear diffusion problems arising in a large number of important scientific and industrial contexts. The difficulties arise from the nonlinearity of the diffusion and the problem is how to handle the nonlinearity of the diffusion. In this study, we focused on the theory of reaction-diffusion system approximation in which the solutions of the nonlinear diffusion problems are approximated by those of semilinear reaction-diffusion systems. We achieved several results regarding analysis of Fast reaction limit problems, analysis of reaction-diffusion system approximation and its applications to numerical analysis and mathematical modeling.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２０１１年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１２年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：非線形拡散問題、退化放物型問題、交差拡散系、反応拡散系近似、急速反応極限、数値解析、自由境界問題、３重結節点

１．研究開始当初の背景

本研究では、氷の融解・凝固の過程を記述するステファン問題、地下水の流れを表す多孔質媒体流方程式、2 種生物種の競争や協調問題における互いの動的な干渉作用を記述する重定-川崎-寺本モデルなど、様々な問題を取り扱った。これらの問題は、非線形拡散問題として、一つの方程式系で表されるが、拡散の退化性と拡散の交差性の２つの大きな性質を有する。拡散の退化性は、拡散係数が０となる場合に現れる。このために、解が不連続になったり、自由境界が現れるなど、取り扱いが複雑になる。ステファン問題や多孔質媒体流方程式は拡散の退化性を持ち、退化

放物型方程式と呼ばれる問題である。一方、多成分系において、拡散が相互に依存しあっているときに、拡散が交差していると言い、そのような系は交差拡散系と呼ばれる。重定-川崎-寺本モデルはその代表例である。

この様な性質を持つ非線形拡散問題の解析、特に、数値解析において、拡散の非線形性をどのように扱うかが問題となっている。代表者は、この非線形性を取り除くための近似について考えてきた。本研究に先立つ研究「反応拡散系近似理論の新展開」(若手研究(B) 2007 年度〜2009 年度)において、非線形拡散問題が、単純な反応と線形拡散からなる半線形反応拡散系により近似できることを示した。つまり、反応拡散系を用いることで、拡散の非線形性を取り除くことができた。この研究は半線形の問題を取り扱うことにより、元の非線形性が強い問題の解析が可能になることを示唆するものである。一般に非線形拡散問題を扱うよりも半線形問題を取り扱う方が容易であるため、この研究により得られる結果は非線形問題の解析や応用に役立つ可能性がある。この立場に立ち、反応拡散系近似理論の応用について考えてきた。この過程で、部分的な問題点も見えてきた。本研究では、それまでの研究を踏まえて、反応拡散系近似理論の細部に踏み込んだ解析を行うことで、その理論を推し進め、さらに、その理論の応用を行うことを考えた。

２．研究の目的

本研究では、応用を見据えた理論の構築を主目的とし、そのために反応拡散系近似理論の細部に踏み込んだ解析からその応用まで、多岐にわたった研究を行った。

具体的には以下に述べる５つのことを行うことを目標とした。

研究(1) 偏微分-常微分系による交差拡散系の近似

先行研究では、拡散係数の上限と下限に着目し、非線形拡散を拡散係数の大きな線形拡散と、拡散係数の小さな線形拡散（退化型の場合は拡散しないもの）に分け、その相互作用により、非線形拡散を近似した。したがって、退化放物型方程式に対しては、一つの非線形方程式を反応拡散方程式と常微分方程式の相互作用により表現している。数値計算をする上で、偏微分方程式に比べて常微分方程式の計算にかかる計算機資源は圧倒的に少ない。さらに、退化放物型方程式に対しては、この常微分方程式が、数値計算上好ましくない解の性質を効果的に処理してくれる。このことが、反応拡散系近似理論を用いた数値解法を効率の良いものにしている。これに対し、退化型でない交差拡散系に対する先行研究では、一つの方程式を二つの反応拡散方程式の相互作用により表現していた。この反応拡散系近似から、簡便な数値解法は得られるが、複数の偏微分方程式を解く必要があり、効率は良くない。数値解析への応用を見据え、交差拡散系も反応拡散方程式と常微分方程式の相互作用により近似できることを示す。

研究(2) 拡散の非線形性がリプシッツ連続でない場合への一般化（局所リプシッツの場合の解析）

先行研究では、拡散の非線形性を表す関数がリプシッツ連続であることを仮定している。多孔質媒体流方程式や交差拡散系の代表的な例の一つである重定-川崎-寺本モデルは、多項式の形の非線形性を持ち、リプシッツ連続ではない。ただし、その非線形性は局所リプシッツ連続であり、問題の解が有界である場合に限れば、どちらの例もこれまでの研究の枠組みで取り扱うことができ、解析への応用が期待できる。また、解の爆発現象を含むような特殊な問題を除いて、これまでの研究の数値解析への応用に関しては問題が無いといって良い。しかしながら、一般には元の問題の解が有界であることが事前に分かっていることは少ない。このため、解析への応用など数学的な要請がある場合には、上記のリプシッツ連続性等の仮定をはずさなければならない。非線形性がリプシッツ連続でなく、局所リプシッツ連続である場合の解析を行う。

研究(3) 反応拡散系とその特異極限を用いた三重結節点を含む自由境界問題の解析

ある３成分反応拡散系の特異極限がある交差拡散系により記述され、更に、その交差拡散系が３重結節点を含む自由境界問題を表現していることが、先行研究における数値実験及び形式的な計算により示唆されていた。この交差拡散系は、これまでに研究されていない問題であり、三重結節点を含む自由境界問題の新たな定式化と言える。この様な自由境界問題の取り扱いは難しく、解析的な研究結果は乏しいが、反応拡散系と交差拡散系の双方を用いたアプローチにより解析が進展する可能性がある。本研究では、これらの反応拡散系と交差拡散系の関係について解析を行う。

研究(4) 退化放物型方程式に対する効率的な数値解法の解析

退化放物型方程式に対して提出した反応拡散系近似を離散化した、退化放物型方程式に対する数値解法についての解析を行う。特に、空間離散を行っていない時間離散スキームについて解析を行う。この方法は、既存の数値解法に比べて、効率的に、精度良く解を捉えることができる。この時間離散スキームは解析的にも取り扱いやすい形をしているため、その収束性については直ちに保証される。数値解析では、誤差評価が重要である。本研究では最適な誤差評価を得ることを目

標とする。
研究(5) 交差拡散系に対する汎用的で簡便な数値解法の提出、解析
交差拡散系に対する効果的な数値解法は、個々の問題それぞれに対して構成され、解析されるのが現状であった。現象のモデリングを行う場合など、パラメータの変更のみでなく、非線形項そのものを変えて多くの数値実験を行いたい場合がある。このようなときに、交差拡散を含む非線形拡散が現れると、大変煩わしい。交差拡散が直接現れない半線形反応拡散系を用いることにより、交差拡散系に対する汎用的で簡便な数値解法を複数得ることができる。そこから適切なものを選び出し、その解析を行う。
以上の研究を柱とし、反応拡散系近似理論の構築から応用まで多岐にわたる研究を行う。

３．研究の方法

研究(1) 偏微分-常微分系による交差拡散系の近似
解析するべき反応拡散系近似は、先行研究において解析していた退化放物型方程式に対するものを交差拡散系に適用出来るように拡張したものである。その反応拡散系の解が交差拡散系の解に収束することを示すことが目標であった。この際、交差拡散系の偏微分-偏微分系による近似に関するそれまでの研究が大いに参考になった。その研究では、拡散係数の大きな線形拡散と小さな線形拡散の相互作用により非線形拡散を表現している。この拡散係数が小さな拡散は、非線形拡散の下限を表現するようなものである。これは、対象の交差拡散を、取り扱いやすい線形拡散の部分と評価しにくい交差拡散の部分に分けるというアイデアを与えてくれた。このアイデアは、解析する偏微分-常微分系からは思いつかないものであった。このアイデアと過去の研究を組み合わせることで、解析が可能となった。
研究(2) 拡散の非線形性がリプシッツ連続でない場合への一般化
先行研究では、拡散係数の小さな線形拡散と、拡散係数の大きな線形拡散との相互作用により、非線形拡散を近似していた。特に、大きな方の拡散係数は、拡散の非線形性を表す関数のリプシッツ定数により制御されていた。局所リプシッツ連続の場合は、この大きな方の拡散係数をパラメータとして変化させることにより、問題の解を近似できると思われる。しかしながら、初期値が有界でない場合や、解が爆発する様な特殊な問題を扱うことになるため、解析は容易でないことが予想されていた。そのため、爆発問題やその近似についての基礎研究を行い、解析の可能性について検討を行った。検討の結果、リプシッツ連続でない場合の解析はやはり困難であることが分かったが、他の重要な非線形問題への拡張の可能性が見えてきた。
研究(3) 反応拡散系とその特異極限を用いた三重結節点を含む自由境界問題の解析
多くの数値実験を行うことにより解の振る舞いを確認し、二宮広和氏(明治大学)と活発な議論を行いながら研究を進めた。扱う反応拡散系の解が極限問題である交差拡散系の解に収束することを示した。また、その交差拡散系はある３重結節点問題の弱形式となることが示された。
研究(4) 退化放物型方程式に対する効率的な数値解法の解析
退化型問題の数値解析に関する既存の結果について調査し、最適な誤差評価を得ることを目標とした。まず、連続問題である反応拡散系近似についての収束のオーダーについて研究した。解析の結果、近似パラメータに対する最適な収束のオーダーが得られた。この結果は、離散問題についての誤差評価の可能性を示唆するものであり、引き続き解析を行なっている。
研究(5) 交差拡散系に対する汎用的で簡便な数値解法の提出、解析
研究(1)にて解析を行った反応拡散系を離散化することにより、汎用的で簡便な数値スキームを提出した。この際、数多くの数値実験を行うことにより、様々な離散化の中から効率の良い数値スキームを選び出した。また、研究(1)(3)(4)の解析手法を参考にし、時間離散スキーム及び数値スキームの解析を行った。

４．研究成果

研究計画に従い研究を遂行し、反応拡散系近似理論の発展と応用について様々な結果を得た。代表者の過去の研究において、一般的な交差拡散系の解を半線形反応拡散系の解により近似できることが分かっていた。ただし、その研究では１つの方程式を２つの偏微分方程式の相互作用により表現していた。数値解析への応用を考えた上では、これは有用であるとは言い難い。そこで、本研究では、1 つの方程式を偏微分方程式と常微分方程式の相互作用により表現できることを示した(雑誌論文③)。このことにより、応用の可能性が格段に広がったといえる。実際に、この研究を応用し、非線形交差拡散系に対する汎用的、効率的、かつ実装が容易な数値解法を提案した。数値実験により、この数値解法による誤差を調べたところ、時間刻みに対する精度は１次、空間刻みに対しては２次精度であることが観測された。この収束次数は、既存の煩雑で計算コストの高い数値解法の次数と同じものであり、数値実験は提案した数値解法の有用性を示すものである。数値解法

の汎用性、簡便性、有効性が確かめられたため、この数値解法の解析を行った。空間離散をしていない時間離散スキームの収束性について解析的な結果を得た(雑誌論文③)。提案した線形解法と実装が煩雑な非線形解法の双方の誤差評価を行うことにより、2 つの解法の比較を行った(投稿中論文)。どちらの解法でも収束率は同じで、更に、この収束率は最適なものであることが分かった。このことは提案した線形数値解法が有用なものであることを示している。交差拡散系の数値解法に関する誤差評価の解析的結果はこれまでに無く、本研究の成果は重要なものである。また、空間離散化に有限体積法を用いた全離散数値スキームについて研究し、その収束性を示した(投稿中論文)。誤差解析及び全離散スキームの解析は当初の計画段階では困難であると予想しており、検討するに留める予定でいたが、基礎研究を含む 3 年間の研究により、解析的な結果を得ることができた。

二宮広和氏(明治大学)と共に、ある 3 成分反応拡散系について研究した(雑誌論文④)。その急速反応極限がある交差拡散系により表現できることを解析的に示した。更に、その交差拡散系が 3 重結節点を含むある自由境界問題の弱形式になっていることを示した。これは、反応拡散系の解が 3 重結節点を含む自由境界問題の解に収束することが厳密に証明されたことを示している。このような結果はこれまでになく、多重結節点を含む自由境界問題の解析の進展に繋がる可能性がある。

反応拡散系近似理論及び急速反応極限理論の細部に踏み込んだ研究や応用について、当初計画を超えた研究も行った。D.Hilhorst 氏(パリ南大学)と共に、沈殿・溶解を伴う液体・個体間の化学反応における急速反応極限について研究した。この問題は核廃棄物処理に関連する応用上重要な問題であると共に、急速反応極限についての理解を深める問題でもある。この問題に対して、その極限を具体的に表し、解がその極限に収束することを示した(雑誌論文⑤及び投稿準備中論文)。

非線形拡散問題の解析の応用として、細胞集団の挙動についてのモデリング及び解析を行った(雑誌論文②)。細胞集団の時空間の振る舞いを考察するために、細胞の大きさ、細胞分裂、2 つの状態とその転換、接触阻害、栄養状態などを考慮して複数成分複数項から成る数理モデルを提案した。これは解析の対象としては複雑すぎる方程式系であるが、本研究で培った知識を動員し、問題の簡略化を行った。非線形拡散と非局所反応の 2 項から成る簡略化した方程式を導出し、その解析を行った。解析や数値実験を用いた考察の結果、多くの要因が細胞集団の振る舞いに関連しているが、細胞の増大率と栄養状態の関係が特に大きな役割を果たしていることが予測され、細胞は周りの密度や環境に敏感に反応していることが推察された。

以上のように、反応拡散系近似理論の発展と応用について様々な研究を行った。本研究内容は多岐にわたるが、それぞれに特色があり、意義深い研究である。また、これらすべての研究は相互に関連しており、一般論の構築と応用に関する研究が相乗して、将来の非線形問題の解析を発展させるものとなることが期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

① H. Murakawa, A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. S, **5** (2012), 147–158, 査読有り. DOI:10.3934/dcdss.2012.5.147.

② A. Ducrot, F. Le Foll, P. Magal, H. Murakawa, J. Pasquier and G. Webb, An in vitro cell population dynamics model incorporating cellsize, quiescence, and contact inhibition, Math. Models Methods Appl. Sci., **21** (2011), 871–892, 査読有り. DOI: 10.1142/S0218202511005404.

③ H. Murakawa, A linear scheme to approximate nonlinear cross-diffusion systems, Math. Mod. Numer. Anal., **45** (2011), 1141–1161, 査読有り. DOI: 10.1051/m2an/2011010.

④ H. Murakawa, and H. Ninomiya, Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, J. Math. Anal. Appl., **379** (2011), 150–170, 査読有り. DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.12.040.

⑤ R. Eymard, D. Hilhorst, H. Murakawa, and M. Olech, Numerical approximation of a reaction-diffusion system with fast reversible reaction, Chinese Annals of Mathematics B, **31** (2010), 631–654, 査読有り. DOI: 10.1007/s11401-010-0604-5.

〔学会発表〕（計４０件）

① H. Murakawa, Spatial patterns in a population model structured by cell size, quiescence and sensing radius, Everything disperses to Miami, the role of movement and dispersal in

spatial ecology, epidemiology and environmental science, The University of Miami, Coral Gables, Florida, USA, 14 Dec. 2012.

② H. Murakawa, Instantaneous limit of a reaction-diffusion system with a fast precipitation and dissolution reaction, Singularities arising in Nonlinear Problems 2012, Kansai Seminar House, 26 Nov. 2012.

③ H. Murakawa, Triple-junctions in a strong interaction limit of a three-component system, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Hyatt Regency Grand Cypress, Orlando, Florida, USA, 3 Jul. 2012.

④ H. Murakawa, Numerical solution of nonlinear cross-diffusion systems by a linear scheme, The 4th MSJ-SI, Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Kyushu University, 15 Sep. 2011.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

〔その他〕
無し。

６．研究組織
(1)研究代表者
村川　秀樹（MURAKAWA HIDEKI）
九州大学・数理学研究院・助教
研究者番号：40432116

(2)研究分担者
無し。

(3)連携研究者
無し。