様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月１１日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２７４００５９
研究課題名（和文）特異性を持つ偏微分方程式の解の高精度計算および精度保証に関する研究

研究課題名（英文）Researches on the high-accurate computation and numerical verification for the solution of the partial differential equation with singularity

研究代表者
小林　健太（KOBAYASHI KENTA）
一橋大学・大学院商学研究科・准教授
研究者番号：60432902

研究成果の概要（和文）：
有限要素法の誤差評価には補間誤差の評価が本質的な役割を果たしています。我々は本研究において、三角形要素上の補間誤差を精密に評価する公式を考案し、証明することに成功しました。特に、三角形要素上の補間誤差が三角形の外接円の半径で押さえられるという、外接半径条件を証明することができました。これにより、解に特異性が現れるような偏微分方程式を有限要素法で解く場合にも、効率的なメッシュ分割を行い、精度良く解を計算することが可能になりました。

研究成果の概要（英文）：
The estimate for the interpolation error plays an essential role in error estimation for Finite Element Method. In our research, we obtained and proved precise formula that bounds interpolation error on the triangular elements. In particular, we proved that the interpolation error is bounded by the radius of circumscribed circle of the triangles. We call this condition circum radius condition. This result enables us to compute solutions of partial differential equation with singularity by efficient mesh division.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１２年度	900,000	270,000	1,170,000
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：精度保証付き数値計算・誤差評価・偏微分方程式・特異性・補間誤差

１．研究開始当初の背景
（１）偏微分方程式においてはしばしば、解が有限時間で爆発したり、非凸領域の非凸な角で解の滑らかさが失われたりなど、解の特異性により数値計算が困難になることがあります。このような場合には、解の特異性の強さに応じてメッシュを細かく切るなどの対処が行われてきましたが、例えば領域の角で特異性が出る場合には、角に向けてどの程度のオーダーでメッシュを細かくしていけ

ばよいのか、三角形要素の形状はどのようなものがよいのかなどの具体的な対処については経験的に行われることが多く、理論的な研究はあまり進んでいませんでした。特異性には、方程式の非線形性に起因する特異性、境界形状に起因する特異性、およびその両方が複合したものがあります。それらについて次で詳しく説明します。

（２）境界形状に起因する特異性について説明します。非凸領域において偏微分方程式を解くと、しばしば、非凸な角で解の滑らかさが失われることがあります。例えば、非凸領域で Poisson 方程式を解くと、非凸な角で解に特異性が現れることが知られています。実際の数値計算では、この特異性に対処するため、非凸な角の周辺でメッシュを細かく切る、いわゆるメッシュリファインメントが用いられています。我々は当研究開始までに、メッシュリファインメントを用いた場合の Poisson 方程式の事前誤差評価を求めることに成功しており、この結果により、二次の非線形楕円型偏微分方程式の解を精度保証することが可能になっていました。しかしながら、誤差評価の際に重要な、三角形要素上の補間誤差評価に改善の余地がある状態でした。一方で、重調和方程式の解に対する事前誤差評価は、ステップ流れ問題などの二次元 Navier-Stokes 方程式の解に対する精度保証を行うためには不可欠ですが、非凸領域で重調和方程式を解いたときに生ずる特異性についてはあまり解析が進んでいませんでした。研究開始時に得られていた誤差評価は、解に特異性が生じるにも関わらず、均等メッシュを用いるもののみですので、かなり小さなレイノルズ数でしか検証が成功していませんでした。

（３）方程式の非線形性に基づく特異性について説明します。非線型方程式においては、しばしば解が有限時間で爆発する現象が見られます。しかし、本当に解が有限時間で爆発することを証明するのは簡単な方程式を除くと非常に難しいのが現状です。証明どころか、状況証拠としてしばしば利用される数値計算でさえ困難な場合が少なくありません。例えば、滑らかな解を初期値とする３次元 Euler 方程式の解について、解が時間大域的に滑らかであり続けるか、有限時間で爆発するような解が存在するかどうかは現在のところ分かっていません。３次元 Euler 方程式の爆発解と思われる例としては、Pelz の数値実験や Kerr の数値実験が知られていますが、それが本当に爆発解であるかは証明されていませんし、近年では、爆発しないと解釈することもできると主張する人もいます。また他の例として、流体方程式をある意味で単純化した方程式として De Gregorio 方程式がありますが、この方程式は非常に特異性の強い解を持つことが知られています。その解は一見、爆発解に見えますが、実際には二重指数的に増大するものの爆発はしないことが数値的に確かめられています。これらの例でもわかる通り、解の特異性の強い状況下においては、爆発解であるかそうでないかを判断することは非常に難しいということが言えます。

２．研究の目的

（１）本研究の目的は、流体方程式をはじめとする偏微分方程式について、解が強い特異性を持つ場合に、その特異性の性質を上手く利用しながら高精度に計算を行い、また、精度保証付き数値計算によって解の存在や一意性などの方程式の構造を明らかにすることです。特異性への対処は、従来は経験的に行われることが多かったのですが、ある程度の理論的な枠組みを構築することを目的とします。詳しくは以下で述べます。

（２）本研究においては、まず、メッシュリファインメントを用いた場合の重調和問題に対する事前誤差評価を確立し、２次元 Navier-Stokes 方程式の解に対する精度保証に応用することを目的とします。また、Poisson 方程式に対する事前誤差評価は我々によって既にある程度の理論が確立されていますが、この改良も目的とします。事前誤差評価の精度は三角形要素上の線形補間誤差をどこまで精密に見積もれるかという点にかかっていますが、ここの見積もりが現状ではあまり良くなく、有限要素法で用いる三角形要素の形が悪いと極端に精度が落ちてしまいます。これに対し、効率的な誤差評価を求めたいと考えています。また、３次元 Euler 方程式について、爆発解が現れるかもしれないと考えられている境界条件や初期値について、精密な数値計算を行い、可能であれば精度保証付き数値計算を用いて解の厳密な挙動を明らかにすることを目的とします。

（３）本研究の独創的な点は、精度保証というアプローチで方程式の特異性に対処しようとする点にあります。単に特異性の強い数値解を高精度に計算する研究や、解構造の単純な方程式に精度保証を適用する研究は数多くありますが、特異性の強い解を高精度に計算し、更にそれを精度保証しようという研究は世界的に見ても少ないのが現状です。また、数値計算アルゴリズムは経験則で運用される部分もありますが、本研究において精度保証を確立する際に、誤差評価を厳密に追及していく過程でその理論的構造が明らかに

なり、数値計算を効率的に実行する上での新たな知見に繋がることも期待できます。

３．研究の方法

（１）ステップ流れなど、非凸領域における Navier-Stokes 方程式の解の存在や一意性を、精度保証付き数値計算を用いて効率的に検証するため、メッシュリファインメントを用いた重調和問題の有限要素解に対する事前誤差評価を確立します。しかし、重調和問題の非凸な角における特異性は Poisson 問題よりはるかに複雑であり、しかも Poisson 問題の時に用いていた手法のいくつかが使えませんので、研究には困難が予想されます。そのため、ひとまず非凸な角の内角が 270 度の場合のみを考え、用いる通常の有限要素基底は長方形メッシュに限定して研究を行います。それが成功すれば、その結果を任意形状の折線領域に拡張する研究を行います。

（２）非凸領域における Poisson 方程式の解に対する事前誤差評価について、その精度の改善を図ります。具体的には、三角形要素上の線形補間誤差定数を精度保証の助けを借りて厳密に求めることによって、事前誤差評価全体の精度を上げる方法を取ります。

（３）De Gregorio 方程式や三次元 Euler 方程式のように、解に強い特異性が出てくるような問題に対し、精度保証付き数値計算を適用する研究を行います。

（４）以上の研究が予定通りには進まない可能性もありますが、その場合でも、実際の数値計算の積み重ねと理論的研究により、効率的な数値計算手法の開発などの、新しい数学的知見が得られる可能性は十分にあると考えています。

４．研究成果

（１）研究目的のうち、重調和方程式の精度保証については、特異性に対応した効率的な事前誤差評価は確立できませんでしたが、誤差評価の際に重要な４階微分に対するノルム不等式の評価を、正方形メッシュから長方形メッシュに拡張することができました。これにより、解に特異性が現れない場合の事前誤差評価を改善することができました。

（２）非線形方程式の爆発解の解析については、特に目立った成果はありませんでした。しかし、今後の進展につながるよう、様々な条件で数値計算を行い、理論を確立するための状況証拠を蓄積しました。

（３）三角形要素上の補間誤差定数の精密化については大きな進展がありました。我々は、三角形要素上の線形補間誤差定数を精度保証付き数値計算の助けを借りて精密に評価することに成功し、その結果をさらに発展させ、使い易く精度の良い公式を作成することに成功しました。これにより、２階の楕円型偏微分方程式の解に対する検証をより効率的に行うことができるようになりました。また、その結果を応用して、三角形非適合要素の厳密な誤差評価を導出することに成功しました。さらに、愛媛大学の土屋卓也教授との共同研究により、補間誤差評価式を、より一般的な関数空間上に拡張することができました。

（４）三角形要素上の線形補間誤差定数が外接円の半径の定数倍で押さえられる、いわゆる外接半径条件を証明することができました。この結果をドロネー三角形分割と組み合わせることにより、あらかじめ与えられた誤差評価を実現するための有限要素メッシュを簡単に作成できるようになりました。

（５）補間誤差評価式の３次元有限要素法への応用についても研究を行いました。２次元有限要素法では、いわゆる外接半径条件が成立することがわかりましたが、３次元では、四面体要素上の補間誤差が外接球の半径では押さえられないような反例を見つけることで、同様の評価が成り立たないことを示しました。四面体要素上の補間誤差評価については、数値計算により誤差評価式の見当をつけることはできましたが、厳密な証明には成功しませんでした。

（６）研究期間内に得られた研究成果について、国際会議で４回、国内の学会で３回の成果発表を行いました。その結果、画期的な成果であるということで、国内外から問い合わせ等の反響がありました。

（７）今後の研究の展望としては、３次元有限要素法の誤差評価について進展が望まれます。応用上は非常に重要な問題なのですが、現状では、精密な誤差評価式を求めるどころか、四面体の形状が誤差評価式に対してどう影響するのかさえわかっていません。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Kenta Kobayashi, Computer-Assisted Uniqueness Proof for Stokes’ Wave of

Extreme Form, Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, 査読無し, 10 巻, 54-67 頁, 2013 年

② 小林 健太, 三角形要素上の補間誤差定数について, 数理解析研究所講究録, 査読無し, 1733 巻, 58-77 頁, 2011 年

③ Kenta Kobayashi, On the global uniqueness of Stokes' wave of extreme form, IMA Journal of Applied Mathematics, 査読有り, 75 巻 5 号, 647-675 頁, 2010 年

〔学会発表〕(計７件)

① Kenta Kobayashi, On the Interpolation Constants over Triangular Elements, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications(NOLTA2012), 2012 年 10 月 26 日, Gran Meliá Victoria, Palma, Majorca, Spain

② 小林 健太, DE 積分公式に対する使い勝手の良い事前誤差評価法, 応用数理学会 2012 年度年会, 2012 年 8 月 31 日, 稚内全日空ホテル

③ Kenta Kobayashi, On the global uniqueness of Stokes' wave of extreme form, Emerging Topics on Differential Equations and their Applications - Sino-Japan Conference of Young Mathematicians, 2011 年 12 月 6 日, Nankai University, China

④ Kenta Kobayashi, On the interpolation constants over triangular elements, The 7th East Asia SIAM Conference, 2011 年 6 月 29 日, Waseda University Kitakyushu Campus

⑤ 小林 健太, 三角形要素上の補間誤差定数について, 研究集会：科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開, 2010 年 10 月 19 日, 京都大学数理解析研究所

⑥ 小林 健太, 三角形要素上の補間誤差定数について, 応用数理学会 2010 年度年会, 2010 年 9 月 8 日, 明治大学駿河台キャンパス

⑦ Kenta Kobayashi, On the interpolation constants over triangular elements, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics, 2010 年 8 月 31 日, Czech Technical University, Czech republic

６．研究組織

(1)研究代表者

小林　健太 (KOBAYASHI KENTA)
一橋大学・大学院商学研究科・准教授
研究者番号：60432902