様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月２５日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010～2011
課題番号：２２７４００６３
研究課題名（和文）　離散可積分系による非衝突ランダムウォーク系の分配関数の計算

研究課題名（英文）　Discrete-time integrable systems and partition functions of vicious walk systems

研究代表者
上岡　修平（KAMIOKA SHUHEI）
京都大学・大学院情報学研究科・助教
研究者番号：70543297

研究成果の概要（和文）：非衝突ランダムウォーク系は、多粒子ランダムウォーク系の一つであり、粒子間の相互作用として、複数の粒子が同時刻に同位置を占めないという制約を課したものである。本研究では様々な構造を持つ格子グラフ上で非衝突ランダムウォーク系を扱い、統計解析の基礎となる分配関数について考察する。具体的には離散戸田方程式等に代表される行列式解を持つ離散可積分系を利用して、分配関数の閉形式が厳密に計算可能な格子グラフを系統的に構成する。また得られた格子グラフを離散力学系の初期値問題や組合せ論の数え上げ問題に応用する。

研究成果の概要（英文）：Vicious walk systems are multiparticle systems in which every two particles, or walkers, cannot occupy the same site at the same time. In this research we consider vicious walk systems on lattice graphs of various types, including the square and triangular lattices. In particular, focusing on the calculation of partition functions, we construct lattice graphs on which we can find a closed form of partition functions. To do that, we utilize discrete-time integrable systems having determinant solutions such as the discrete hungry Toda equation. Applications to ultradiscrete integrable systems as well as combinatorial problems are also considered.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：統計数学、組合せ論、可積分系、非衝突ランダムウォーク、直交多項式、連分数、タイリング

１．研究開始当初の背景
M. E. Fisher（1984）の提案した非衝突ランダムウォーク系（vicious walk）は、多粒子ランダムウォーク系の一つであり、粒子間の相互作用として、複数の粒子が同時刻に同位置を占めないという制約を課したものである。

非衝突ランダムウォーク系に対する統計解析においては、分配関数（重み付き状態和）

の計算が理論面からの基礎となる。非衝突ランダムウォーク系の分配関数の計算は、数学的には、適当な格子グラフ上での非交叉的な径路配置という組合せの問題として解釈できる。さらに非交叉径路と行列式に関するGessel-Viennot-Lindström の補題を通して、一粒子系の状態和を成分とする行列式の計算に帰着する。

非衝突ランダムウォーク系の研究は、最も単純な格子グラフである正方格子に関するものがほとんどである。特に正方格子に対してはGuttmann ら（1998, 2000, 2003）により分配関数の閉形式（積表示）まで求められている。格子グラフとしてより複雑な構造のものを扱う場合、分配関数の計算はより困難なものとなる。どのような格子グラフであれば分配関数の閉形式が計算できるのか。またそのような格子グラフを系統的に構成するにはどうすればいいのか。これらの問題の解決が本研究の大目標である。

２．研究の目的
本研究では非衝突ランダムウォーク系の問題を様々な格子グラフの上で考える。特に着目するのは非衝突ランダムウォーク系の分配関数である。本研究の主目的は、分配関数の閉形式が計算可能な格子グラフを、行列式解を持つ離散可積分系を用いて系統的に構成することである。

考察対象とする離散可積分系は離散ハングリー戸田方程式、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式、離散相対論戸田方程式、RI 格子方程式、RII 格子方程式の五つである。これらの離散可積分系に共通する特徴として、付随的な直交関数系の存在がある。上述の離散可積分系はそれぞれ双直交多項式、対称双直交多項式、Laurent 双直交多項式、RI 有理関数、RII 有理関数に対応している。離散可積分系の時間発展則はこれらの直交関数系の一パラメータ変形と同一視できることが知られている。

これらの離散可積分系と直交関数系を題材にして、次の三点を遂行することにより研究の主目的を達成する。

（１）双直交多項式、対称双直交多項式、Laurent 双直交多項式、RI 有理関数、RII 有理関数の五種類の直交関数系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成する。

（２）離散ハングリー戸田方程式、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式、離散相対論戸田方程式、RI 格子方程式、RII 格子方程式の五つの離散可積分系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成する。離散可積分系に対応する格子グラフは、付随する直交関数系に対応する格子グラフを変形してつくる。

（３）（１）と（２）で構成した格子グラフのそれぞれに対して、格子グラフの構造に対応する非衝突ランダムウォーク系を考える。特に非衝突ランダムウォーク系の分配関数について、分配関数の閉形式（積表示）の計算法を、対応する離散可積分系の行列式解を用いて定式化する。

３．研究の方法
研究の目的に掲げた主目的を達成するために、次の（１）から（４）を実施した。また関連分野への応用として（５）を行った。

（１）双直交多項式、対称双直交多項式、Laurent 双直交多項式、RI 有理関数、RII 有理関数の五種類の直交関数系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成する。格子グラフの構造を決定するために、それぞれの直交関数系を特徴付ける線形方程式を利用する。線形方程式に現れる係数行列を、グラフ理論における隣接行列や、確率過程の解析に用いる遷移行列として捉えることによりグラフの構造を決める。

（２）直交関数系に対応する格子グラフを構成する際、直交関数系に付随する連分数（行列連分数、Thron 連分数、Thiele 連分数等）を利用するほうが（１）で述べた線形方程式からの構成よりも簡単な場合がある。この場合には Flajolet（1980）の手法を援用し、連分数に対して格子グラフ上の径路による組合せ論的な解釈を与える。そのようにして連分数に対して構成した格子グラフを（必要ならば適宜修正して）直交関数系に対応する格子グラフとする。

（３）離散ハングリー戸田方程式、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式、離散相対論戸田方程式、RI 格子方程式、RII 格子方程式の五つの離散可積分系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成する。離散可積分系に対応する格子グラフは、付随する直交関数系に対応する格子グラフを変形してつくる。変形にあたっては直交関数系と離散可積分系の間にある変数変換公式などを参考にする。

（４）離散可積分系に対応する形で構成した格子グラフに対して、その上での非衝突ランダムウォーク系を考える。非衝突ランダムウォーク系の分配関数（状態和を成分とする行列式）の計算公式を、離散可積分系の行列式解から構成する。

（５）非衝突ランダムウォーク系以外の分野への応用として、可積分系の理論研究や組合せ論の数え上げ問題を扱う。具体的には超離散可積分系の解やドミノ・タイリングの数え上げ問題に対して、格子グラフや直交関数系をツールとした解析を行う。

４．研究成果

研究の目的に掲げた主目的を達成するにあたって次の（１）から（３）の成果を得た。また関連分野への応用として（４）と（５）の成果を得た。

（１）双直交多項式、対称双直交多項式、Laurent 双直交多項式、RI 有理関数、RII 有理関数の五種類の直交関数系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成した。双直交多項式に対応する格子グラフは帯行列を遷移行列とするようなグラフ、対称双直交多項式は正方格子、Laurent 双直交多項式は三角格子である。また RI および RII 有理関数に関してはそれに付随する連分数である Thiele 連分数を取り上げ、Thiele 連分数に対応する格子グラフを構成した。得られた格子グラフは「正方格子に逆方向に戻る枝を付け加えたもの」（図１参照）である。

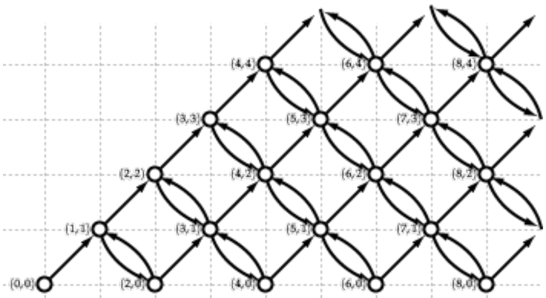

図１：Thiele 連分数に対応する格子グラフ

ここで得られた結果は組合せ論における Viennot（1983）の研究を一般化または拡張するものとして捉えられる。Viennot が考察対象としたのは直交多項式（およびその特別な場合である対称直交多項式）であり、それに対して Motzkin 路や Dyck 路といった格子路を用いた組合せ論的な解釈を与えた。本研究の結果は直交多項式に対する Viennot の組合せ理論をより多くのクラスの直交関数系に敷衍するための方法論を与えている。

また Thiele 連分数に関する結果は Flajolet（1980）による Stieltjes 連分数に対する組合せ論的解釈を拡張するものである。Flajolet の理論は組合せ論・離散数学の問題を代数的・解析的に扱う際に強い力を発揮し、格子路のみならず、グラフ理論における木構造や置換の数え上げなど様々な問題に応用されている。本研究の結果は、組合せ論・離散数学の問題に対して Thiele 連分数という新たな解析ツールを提供するものとみなせる。

（２）離散ハングリー戸田方程式、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式、離散相対論戸田方程式、RI 格子方程式、RII 格子方程式の五つの離散可積分系に対して、それぞれに対応する格子グラフを構成した。離散ハングリー戸田方程式に対応する格子グラフは正方格子、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式は図２のようなグラフ、離散相対論戸田方程式は籠目格子、RI および RII 格子方程式は図１の格子グラフである。

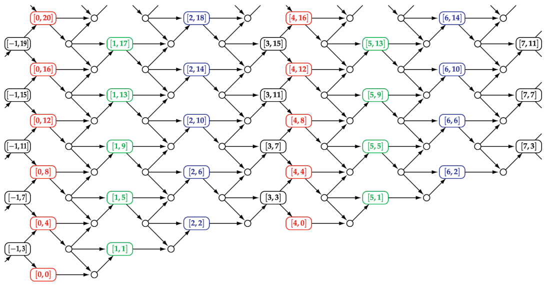

図２：離散ハングリーLotka-Volterra 方程式に対応する格子グラフ

離散ハングリー戸田方程式に対応する正方格子や、離散ハングリーLotka-Volterra 方程式に対応する格子グラフの構造は、非衝突ランダムウォーク系の解析において一般に用いられる正方格子と本質的に同等である（局所構造の変換により移り合う）。

離散相対論戸田方程式に対応する籠目格子や、RI および RII 格子方程式に対応する図１の格子グラフは、グラフ内にサイクルが存在するなど、単純な正方格子とは本質的に異なる構造を持っている。

（３）（２）で構成した格子グラフに対して、その上での非衝突ランダムウォーク系を考えた。特に分配関数（状態和を成分とする行列式）の計算公式を、離散可積分系の行列式解を用いて導出した。（２）で考察した五つの離散可積分系のそれぞれについて分子解と呼ばれる行列式解の存在が知られている。

この行列式解は離散可積分系の解を行列式の比の形で与えるものである。これを利用することにより行列式で記述される分配関数の計算公式として、最終的に閉じた形の積表示を与えるものをつくることができる。

この結果を以って「非衝突ランダムウォーク系の分配関数の閉形式が計算可能な格子グラフを、離散可積分系を用いて系統的に構成する」という当初の目的は達成された。

今後の課題として、本研究の成果として得られた種々の格子グラフおよびその上での非衝突ランダムウォーク系に対して、その物理的な解釈が求められる。従来考えられてきた正方格子上の非衝突ランダムウォーク系は「一次元格子上に並んだ粒子が、各時刻においてそれぞれ左右どちらかのサイトに移動する」という物理モデルとして解釈できる。本研究で現れた格子グラフに対しても同様のまたは全く異なる解釈が可能であるかどうかは重要な検討課題である。

（４）可積分系理論への応用として、超離散可積分系の一つである超離散戸田方程式の初期値問題を扱った。特に正方格子とその上の重み付き径路を考え、超離散戸田方程式の解を初期値の関数として書き下すという操作が、正方格子上において径路の重みを最小化するという最適化問題を解く操作と同等であることを示した。

（５）数え上げ組合せ論への応用として、三角格子上の非交叉径路の数え上げ問題を扱った。三角格子上に複数の径路を互いに交差しないように配置するとき、可能な配置の仕方の総数は Narayana 多項式や large Schröder 数等を成分とする行列式の値に一致する。本研究では Narayana 行列式を成分とする Hankel 行列式を取り上げ、三角格子に対応する直交関数系である Laurent 双直交多項式等を用いてその値を具体的に求めた。

この結果は非交叉的な三角格子路に関するものだが、また一方で組合せ論における Aztec ダイアモンドのドミノ・タイリング問題に関連するものとも解釈できる（図３参照）。

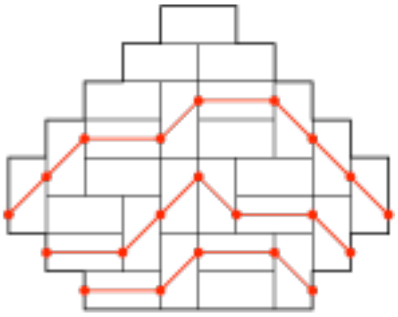

図 3: 三角格子路の非交叉配置と底部の削られた Aztec ダイアモンドに対するドミノ・タイリングの対応

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 上岡修平、離散可積分系による非交叉歩道の数え上げ、九州大学応用力学研究所研究集会報告書 23AO-S7「非線形波動研究の進展―現象と数理の相互作用」、査読有、2012、176−181

② 上岡修平、Frobenius-Stickelberger-Thiele 連分数とグラフ上の歩道の数え上げ、九州大学応用力学研究所研究集会報告書 22AO-S8「非線形波動研究の新たな展開―現象とモデル化」、査読無、2011、208−213

③ 高垣知哲、上岡修平、超離散戸田方程式の解のグラフによる構成、九州大学応用力学研究所研究集会報告書 22AO-S8「非線形波動研究の新たな展開―現象とモデル化」、査読無、2011、242−247

〔学会発表〕（計７件）

① 上岡修平、離散可積分系による非交叉歩道の数え上げ、九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の進展―現象と数理の相互作用」、2011 年 10 月 28 日、九州大学

② Shuhei Kamioka、Orthogonal functions, continued fractions and walks on graphs、11th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications、2011 年 8 月 30 日、Universidad Carlos III de Madrid, Spain

③ 新宮史也、上岡修平、離散ハングリー戸田方程式の持つ組合せ論構造、日本応用数理

学会 2011 年研究部会連合発表会、2011 年 3 月 7 日、電気通信大学

④ 高垣知哲、上岡修平、超離散戸田方程式の解の組合せ論的な構成、日本応用数理学会 2011 年研究部会連合発表会、2011 年 3 月 7 日、電気通信大学

⑤ Shuhei Kamioka、Combinatorial aspects of orthogonal functions、Australian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing、2010 年 12 月 7 日、Australian National University, Canberra, Australia

⑥ 上岡修平、直交関数に対する組合せ論的アプローチ、非線形数理若手の会、2010 年 11 月 15 日、九州大学西新プラザ

⑦ 上岡修平、Frobenius-Stickelberger-Thiele 連分数とグラフ上の径路の数え上げ、九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」、2010 年 10 月 29 日、九州大学

６．研究組織

(1)研究代表者

上岡　修平（KAMIOKA SHUHEI）
京都大学・大学院情報学研究科・助教
研究者番号：70543297

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：