様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　6 月　18 日現在

機関番号：47118
研究種目：若手研究(B)
研究期間：平成 22 年度～平成 24 年度
課題番号：22740074
研究課題名（和文）　鞍点型問題に対する高速精度保証付き数値計算法の構築

研究課題名（英文）　NUMERICAL VERIFICATION METHODS FOR SADDLE POINT PROBLEMS

研究代表者
橋本　弘治　（HASHIMOTO　KOJI）
中村学園大学短期大学部・幼児保育学科・講師
研究者番号：40455093

研究成果の概要（和文）：
本研究では 90 年代に多くの解析が行われた理想的な問題のみならず、現実的な実際問題を前提として、多くの鞍点型問題に対して理論的に高精度を保証する前処理の有用性を確認することができたことは一定の成果と考えている。また、複雑な鞍点型問題に対しては一般的前処理理論ではなく、主要固有値に注意して問題に応じた前処理行列を選ぶことが遥かに実際的であることが確認できたことは、今後の鞍点型問題の解析に大いに役立つものと考えている。

研究成果の概要（英文）：
This research showed the usefulness of the preconditioned which guarantees high precision theoretically to many realistic problems. Moreover, I think that it is greatly useful for the analysis of a future saddle point problem that it has checked that it was far practical for it to be cautious of the main eigenvalue instead of general pretreatment theory to a complicated saddle point problem, and to choose the preconditioned matrix according to a problem.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2013 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：応用数学・精度保証付き数値計算法

１．研究開始当初の背景
鞍点型問題は数学をはじめとして流体力学・金融工学・最適化理論など様々な数理科学の分野において現れ、特に行列解析の分野を中心として数多くの研究成果が発表されている。しかし、実際的な鞍点型問題の殆どが大規模な連立方程式となり、そして、理論的な解析は多く存在するものの、大規模計算への適用に必要となる解析および数値解法などは殆ど存在しない現状である。そこで、本研究では固有値解析を中心として、理論的にも実際的にも有効な前処理による数値解法、そして、その大規模計算の品質保証として必要となる 2 重前処理を用いた精度保証付き数値計算法、および、実用的な適用において必要不可欠となる高速精度保証法の構築を目的とする。

２．研究の目的

本研究では以下の鞍点型問題について考える。

$$\begin{aligned} Ax+B^{T}y&=f \\ Bx-Cy&=g \end{aligned}$$

但し、A は n 次正方行列、B は m×n 行列、C は m 次半正定値行列、f と g は既知ベクトルである。

1980 年代から 1990 年代、G.H.Golub を中心とするスタンフォード大学やオックスフォード大学の研究者らによって鞍点型問題は飛躍的な進歩を見せた。しかし、当時は行列 A を正定値と仮定して考える場合が多く、これは圧力行列 $BA^{-1}B^{T}+C$ が正定値となることから外部反復としての CG 法などの様々な数値解法の適用が可能であり、研究対象は主に圧力行列の固有値解析や古典的 Uzawa 法などの外部反復により生じる不正確性の解析などであった。勿論、内部反復法ついての研究も行われていたが、当時では鞍点型問題に特化したような数値解法は存在しなかった。それが 2000 年前後から現在にかけて、計算機の飛躍的な発展と共に研究対象がより複雑で大規模な鞍点型問題へと変わり、また、前処理理論を取り入れることにより内部反復法に関する研究も数多く行われている。例えば、鞍点型問題に対する内部反復法の為の前処理として、行列 A を正定値と仮定した上で(1,1)-Block を A、(2,2)-Block を $BA^{-1}B^{T}+C$ とした対角ブロック行列などによる理論的に有用で画期的なブロック前処理法の固有値解析の結果が Golub らによって発表された。また、最近ではより複雑な問題として行列 A が半正定値となる場合、特に半分近くの固有値が zero 固有値となるような場合における研究も盛んに行われるようになった。但し、C≡0 として考える。この場合、まず全体の正則性を確保する為にチホノフの正則化などの手法が適用される。具体的には、任意の正定値行列 Q を用いて行列 A を $A+B^{T}Q^{-1}B$ となるように全体を変形する。ここで問題となるのは行列 Q の選び方であるが、多くの研究において Q=ωIm（ωはパラメータ、Im は m 次単位行列）とされている。このように前処理行列を選ぶことにより、実計算においても理論的にも考え易い為、多くの研究者の研究対象となり、内部反復法の為の様々なブロック前処理法の研究結果や $B^{T}Q^{-1}B$ に多量の計算コストが必要となるような場合では外部反復法の為の固有値解析の結果が数多く発表されている。このような研究の結果、晩年の Golub の集大成とも言われている 2005 年に発表された論文(M. Benzi, G.H. Golub, J. Liesen; Numerical solution of saddle point problems.Acta Numerica (2005), p.1-137.)からも分かるように、行列解析において鞍点型問題は主たる研究対象といっても過言ではない程へとなっていった。但し、この論文の中で 500 編以上の参考文献が引用されているが、日本人研究者の名前が Uzawa 法の提案者である東京大学宇澤弘文名誉教授や申請者を含めて 5 名にも満たなかったことは行列解析における日本の弱さを印象付ける結果となった。

以上のように鞍点型問題についての研究は急速に発展しているものの、未だ解決しなければならない問題が多く存在することも事実である。但し、鞍点型問題の多くが微分方程式から生じている為に有限要素法や差分法等により離散化され、それぞれの行列は疎行列、場合によってはブロック疎行列となっている場合が殆どであり、よって、ここで言う問題には理論的な部分にも存在しているが、同時に、鞍点型問題の今後の研究において疎性やブロック性を生かしていく為の新たな理論構築という課題も含まれていることを意味している。

具体的な問題としては、例えば内部反復法を利用する場合、Golub らによって提案された理論的に保証されたブロック前処理法では圧力行列 $BA^{-1}B^{T}+C$ による連立方程式を考える必要があるが、逆行列 A^{-1} の取り扱いについて、多くの場合において n≫m である為、大規模計算には適さないことが問題となっている。また、行列 A が半正定値の場合では、内部・外部反復法どちらの適用においても行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ による連立方程式を考える必要があるが、疎性やブロック性が崩れる為にこの効率的な数値解法の開発が問題となっている。これら 2 つの問題の解決は大規模計算へと展開していく上で不可欠なものであるが、効果的な研究結果は未だ発表されておらず、既に発表されている多くの研究結果も未だ大規模計算には本質的に適用されるに至っていない現状である。

そこで、鞍点型問題に対して、2 重前処理法による数値解法とその大規模計算の品質保証として必要となる精度保証付き数値計算法、および、その実用的な適用において必要不可欠となる高速精度保証法の構築を目的とする。

これまで、香港理工大学陳小君教授と共に鞍点型問題に関する論文を 2 編執筆した。主論文の内容は行列 A を正定値および行列 B を full-rank と仮定した上で、鞍点型問題に対する超高速精度保証法を提案するものであった。この中で(1,1)-ブロックを In、(2,2)-ブロックを BB^{T} とするブロック前処理行列を提案し、固有値解析を行うことにより、前処理後の圧力行列の条件数が行列 A の条件数で上から抑えられることを理論的に証明し、その有用性を数値的に立証した。この結果は鞍点型問題に対する精度保証付き数

値計算法の結果として前述した Golub の論文も引用された。また、この結果はその後いくつかの研究論文において、既存手法として比較され、特に流体力学の問題に関しては圧倒的に優位な結果が示されている。しかし、論文の手法は局面補完問題（$C\equiv 0$）などの最適化理論より生じる問題に対してはあまり良い結果を示すことができなかった。勿論、論文はこれらの問題を想定した結果ではなかったが、良い結果を示すことができなかった理由は、BB^{T}を前処理行列とすることで結果的に行列 A の条件数が問題となるが、流体力学の問題では行列 A は拡散項の離散化である為に条件数は非常に良く、対して、曲面補完問題では行列 A の固有値の半分近くが zero 固有値である為、結果として行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の条件数が問題となるが、具体的な問題において行列 $A+B^{T}B$ の条件数が非常に大きく、かつ、多くの研究において$Q=\omega Im$としている為にうまくωを選んだとしても殆ど状況が改善しないことが原因であった。

しかしながら、このことが今回の研究の着想に至った。すなわち、行列 BB^{T}を前処理とすることにより前処理後の圧力行列の条件数が行列$A+B^{T}Q^{-1}B$の条件数により上から抑えられるので、行列 Q を 2 つ目の前処理として行列$A+B^{T}Q^{-1}B$の条件数が安定するように選べば良いと考えたのである。この考えの下、$Q=\omega BB^{T}$として固有値解析を行ったところ、画期的な結果として前処理後の圧力行列の条件数が $1+\omega\|A\|_{2}$で上から抑えられることを理論的に証明した。但し、$\|\cdot\|_{2}$は行列の 2-norm である。事実として金融工学や最適化理論から生じる鞍点型問題において、行列 A は制約条件の為に多量の zero 固有値を持っているが、それ以外については流体力学の場合と同様に拡散項などの離散化であることが殆どであり、よって、$\|A\|_{2}$は非常に安定した値となっている。ゆえに、前述したように鞍点型問題の多くが $n\gg m$ を満たしている為、行列 BB^{T}の前処理における計算コストは非常に小さく、大規模計算への適用は十分に可能であることが予測される。すなわち、この 2 重の前処理を適用（2 重前処理法）することにより、本研究全体の骨格は概ね完成している現状である。但し、本研究では外部反復法を基盤としている為、実際的に有効な数値解法および高速精度保証法の構築の為には行列$A+B^{T}Q^{-1}B$による連立方程式の効率な数値解法を開発することが重要となる。従って、研究期間において実際問題に多く現れる疎性やブロック性について行列$A+B^{T}Q^{-1}B$の固有値解析を進め、加えて、この行列による連立方程式の効率的な数値解法を開発することにより、鞍点型問題に対する高速精度保証付き数値計算法の構築を行っていく。

精度保証付き数値計算法とは計算機による近似計算の厳密な誤差評価という計算の品質保証を行う手法として日本とドイツの研究者らを中心に近年構築された手法であり、これは理論的研究が困難な解析学上の問題に対する計算機支援証明という観点からも世界的に注目を集めている。一方、行列解析は長きに渡る歴史を有する学問であり、現在では科学技術の根幹を支える役目を果たしている。しかし、理論と実際に差異があることも事実であり、特に鞍点型問題等の最高位の問題に対して大規模計算への適用可能性が低いことが一つの課題となっている。従って、画期的な固有値解析の結果の下、鞍点型問題に対する高速精度保証法の構築を目的とする本研究は学術的な革新性があり、また、精度保証付き数値計算法の先進国である日本から世界に先駆けて発信することは先駆的独創性に富む特徴ある研究と言えるものである。

３．研究の方法

現状として、行列 BB^{T}による 2 重前処理により主たる評価となる圧力行列の固有値評価は完成している。よって、行列 A が半正定値となる場合に考えなければならない行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の条件数の効果的な評価法の開発が必要となる。詳細は以下に示しているが、多くの実際問題で満足する行列 A がブロック対角行列の場合を考え、正定値と半正定値の部分に分けて、この半正定値の部分を落とすことにより、ブロック性を生かした行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値の効率的な評価法の開発および更なる改良を行い、鞍点型問題に対する高速精度保証法の構築を計画する。次に、精度保証理論を具体的な実際問題に適用することによりその有用性を実証すると共に、微分方程式からの離散化手法の改善を検討し、最後に、上記高速精度保証法の構築において用いる行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ を前処理として用いた鞍点型問題に対する効果的な数値解法の開発を計画する。

研究目的の中で示したように、行列 BB^{T}を前処理とする 2 重前処理における鞍点型問題に対する精度保証付き数値計算法の骨格は概ね完成している。但し、行列 A が半正定値なる場合において、行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の条件数を評価する必要がある。説明の為に行列 A を対称性を仮定すると、$Q=\omega BB^{T}$から行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の最大固有値は $\|A\|_{2}+\omega-1$ で上から抑えられる。この評価は容易に得られるが、問題となるのは最小固有値の評価である。精度保証付き数値計算では多量の物理メモリを要する為、できる限

り計算コストの軽減を考慮しなければならない。また、その高速化の為には現実問題の多くで仮定できるブロック性を生かすことが求められる。

そこで、特に行列 A が $A=\mathrm{diag}(A1,A2)$ となるブロック対角行列の場合について、この場合のブロック性を生かした行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値の効率的な評価法の開発を計画する。但し、行列 $A1$ は正定値、行列 $A2$ は半正定値と仮定する。(これらの仮定は一般性を失わない。) そして、行列 B を $A=\mathrm{diag}(A1,A2)$ に対応させて $B=(B1,B2)$ と表す。この時、行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値は行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値で下から抑えることができ、更に、これは対角化可能となる。

ここで、行列 $B2$ が正則と仮定すると行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ の逆行列はブロック性を生かした形で表現できる。実際、行列 A が半正定値となるような曲面補完問題では行列 $B2$ は正則となっている。よって、大規模な鞍点型問題に対する精度保証付き数値計算法の構築に必要な最低限の準備は整っている現状である。ゆえに、上記の関係式を中心として、行列 $A2$ を落としたことによる固有値の影響について固有値解析を行い、また、$Q=\omega BB^{T}$ であることを生かした評価法の開発、および、行列 $A2$ の次元が小さい場合や行列 $B2$ が正則とならない場合の効果的な最小固有値の評価法について検討することにより、鞍点型問題に対する 2 重前処理による高速精度保証法を構築していく。但し、本研究で取り扱う鞍点型問題は微分方程式から生じる離散化問題を想定している。よって、有限要素法における要素の形状や滑らかさなどを考慮することにより、行列 A や行列 B の性質を大きく変えることも期待される。ゆえに、このような観点からの検討も同時に行い、場合によっては曲面補完問題で用いられている H1 法の改良なども含めて研究を遂行していく。

精度保証法には行列解析を中心とした有限次元を対象としたものと微分方程式などの無限次元を対象としたものの 2 つに分類され、特に後者は数値的検証法と呼ばれている。本研究は前者に属するものであるが、どちらにおいても計算機支援証明を行っている。しかし、これは「行ってみなければ分からない」という危うさも秘めており、ゆえに、具体例による数値実験が必要不可欠となる。本研究では数百万元から数千万元の問題を想定しており、従って、はじめに平成 22 年度に構築する 2 重前処理による高速精度保証法の有効性の実証を行っていく。

次に、鞍点型問題に対する数値解法の開発を計画する。そこで、計算コストについて考える。殆どの物理・自然現象の数理モデルの解析に有限要素法や差分法が用いられ、その数値計算において、分割幅をより小さく取るに連れて数値計算コストが増大していくことはよく知られている。計算コストを考える上で、行列の次元が大きくなると 1 回の反復計算に要するコストが増大することは避けられないことではあるが、例えば ICG 法を用いる場合や簡単な Poisson 方程式の離散化問題に対する CG 法においても、分割幅を小さくしていく、つまり行列の次元が大きくなると、微分方程式としては理論的に全く同じであったとしても反復回数は増加することもよく知られている。この 1 回の反復計算に要するコストと反復回数が増大することによるコストという 2 重のコストを如何に削減するかということが大規模計算を取り扱う上で今後重要な課題となり、また、反復法や前処理法などの数値計算法の更なる発展の為に必要となっていく。言うまでもなく、前者に関しては並列計算や分散処理などの技術的な改良が必要であり、後者に関しては前処理法等の理論的な改良が必要である。そして、どちらに関しても多くの研究が行われ、数多くの研究結果が発表されているが、特に後者に関しては鞍点型問題等の最高位の問題に対して、大規模計算への応用を含めて効果的な研究結果は未だ発表されていない現状である。本研究は精度保証法を中心とした研究であり、よって、後者の理論的可能性を追求していく。

反復回数は行列の条件数と深い関わりがあることは言うまでもない。そこで、前処理によって条件数を調整するのであるが、大規模計算では理論的に保証された前処理であってもその実現可能性も考えなければならない。例えば、逆行列を前処理として用いるならば反復回数は常に 1 回となるが、これは大規模計算に関わらず現実的に不可能である。研究目的の中でも述べた Golub が提案したブロック前処理法は理論的に保証された画期的な結果と言えるが、行列 A を正定値とした場合においても圧力行列 $BA^{-1}B^{T}+C$ を前処理行列とする為、逆行列 A^{-1} の取り扱いについて、多くの場合で $n\gg m$ であり、大規模計算における実現可能性は低いと言わざるを得ない。よって、行列 A が半正定値の場合ではその可能性は更に低くなることは容易に想像できる。これに対して、本研究で提案する 2 重前処理法では前処理行列が BB^{T} である為、実現は容易であり、また、前処理後の圧力行列の条件数が $1+\omega\|A\|_{2}$ で上から抑えられること理論的に証明している為、加えて、実際的な多くの鞍点型問題において $\|A\|_{2}$ は非常に安定した値となっている為、この行列 BB^{T} による 2 重前処理は鞍点型問題に対する効果的な数

値解法となることが期待される。具体例として、定常 Stokes 方程式や新潟中越地震（防災科学技術研究所提供）を例とした曲面補完問題での数値実験において、分割幅に拘わらず 10 回以内の一定の反復回数で外部反復による CG 法が収束する数値結果を得ている。よって、鞍点型問題に対する 2 重前処理を用いた効果的な数値解法の開発は精度保証法と同様に最低限の準備は整っている現状である。但し、2 重前処理にも問題点がある。定常 Stokes 方程式のように流体力学の問題は行列 A が正定値（少なくとも正則性は仮定できる）となることから疎性やブロック性を効率的に利用できるが、曲面補完問題などの最適化理論の問題では行列 A が半正定値となり、内部・外部反復法どちらにおいても正則性確保の為に行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ による連立方程式を考える必要があり、上記の数値例においても 1 回の反復に要する計算コストは必ずしも小さくはない。

そこで、行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ による連立方程式に対して､特に行列 A が A=diag(A1,A2) となるブロック対角行列の場合についての効果的な前処理を用いた鞍点型問題に対する数値解法の開発を計画する。精度保証法との関連として、はじめにブロック性を利用した高速化の為に、平成 22 年の計画の中で示したような行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ を前処理行列とすることを考える。しかしながら、精度保証法については上からの評価が本質的に重要である為に、特に大規模計算においては多少の過大評価であっても高速化を重視した結果を採用する場合が多いが、数値解法に関しては本質的に前処理により変化するすべての固有値の挙動が問題となる。すなわち、高速化の観点からは行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ は効果的な前処理行列と言えるが､A2 を落としたことによる影響は問題により異なる為、これは一般的に効果的な前処理とは言うことができない。但し、精度保証法においては固有値の厳密なる上からおよび下からの評価が必要となるが、数値解法に対する前処理では上・下三角ブロックや不完全分解を用いた前処理の研究も行われていることからも精度保証法程の理論的な厳密な評価を必要としないことも事実である。これらの状況を考えると、分散処理や並列計算も考慮するが、本研究は精度保証法と中心とした研究であり、よって、理論的解析が可能な行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ を前処理行列とする考えを中心として、前述したように本研究で取り扱う鞍点型問題は微分方程式から生じる離散化問題を想定している為、例えば流体力学におけるバブル関数の利用など、有限要素法を含めた離散化の時点からの改良や曲面補完問題で用いられている H^{1} 法の改良なども含めて、鞍点型問題に対する効果的な数値解法の開発を行っていく。

４．研究成果

行列 BB^{T} を前処理とする２重前処理における鞍点型問題に対する精度保証付き数値計算法において、本年度は行列 A が半正定値となる場合、かつ、A=diag(A1,A2) となる場合について、ブロック性を生かした行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値の効率的な評価法の開発を計画した。但し、行列 A1 は正定値、行列 A2 は半正定値と仮定する。基本的な方針は､行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値を行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値で下から抑えることができることを利用するものである。但し、行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}Q^{-1}B$ の疑似(一般)的な LDL 分解は得られていることから、最小固有値の評価法は既に完成しており、よって、目的は効率的な計算法の開発であった。様々な数値実験を行った結果、半正定値部分の A2 の選び方が重要となることが多くの数値例より明らかとなり、また、その選び方は実際問題（静磁場問題や曲面補完問題）において構造的に比較的簡単に決定できることも明らかとなった。すなわち、本研究で対象としている問題は実際問題であり、行列解析として考えるというよりは実際問題により(時に伝統的に)決定されるパラメータをみながら A2 を決定することで、行列 $A+B^{T}Q^{-1}B$ の最小固有値を効率的に評価することが可能となった。

研究計画で示した鞍点型問題に対する数値解法の開発について、A=diag(A1,A2) において、行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値を LDL 分解可能な行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値により下から抑えることで、行列の疎性やブロック性を生かした効率的な評価法の開発を行う中で、LDL 分解が正方行列とならない場合について検討を行ってきたが、多くの問題に対して行列 A2 の選び方が本質であることが数値シュミレーションにて明らかとなった。すなわち、理論的に行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値を行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値が下から抑えおり、また、どちらも半正定値行列となることから､問題の構造上 zero 固有値となる部分に加えて、最大最小値原理等により主要固有値が残るように行列 A2 を選ぶことで、Uzawa 型数値解法において必要となる（計算コストの殆どを占める）内反復行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}*Q^{-1}*B$ においても非常に有効な前処理行列を容易に構成できることが明らかとなった。

これまでの成果として、関係式、

$A=\mathrm{diag}(A1,A2)$ において、行列 $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値を LDL 分解可能な行列 $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値により下から抑えることで、行列の疎性やブロック性を生かした効率的な評価法について昨年度は研究を行い、その中でLDL分解が正方行列とならない場合について検討を行ってきた。その結果、多くの問題に対して行列 A2 の選び方が本質であることが数値シュミレーションにて明らかとなり、理論的に $\mathrm{diag}(A1,A2)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値を $\mathrm{diag}(A1,0)+B^{T}*Q^{-1}*B$ の最小固有値が下から抑えていることから、例えば、問題の構造上 zero 固有値となる部分に加えて、最大最小値原理等により主要固有値が残るように行列 A2 を選ぶことで、鞍点型問題に対する高速数値計算法の構築は可能であることから、今年度は数値シュミレーションを中心に行った。但し、精度保証に関しては、昨年度より香港理工大学陳小君教授との共同研究として、G.H.Golub の結果と本研究の提案手法を組み合わせることにより、鞍点型問題に対する新たな精度保証法の開発に取り組んでいたが、事情により直接的に十分な議論が難しい期間が続いた為、本研究期間での構築が困難となった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計５件）

① 鞍点型連立一次方程式に対する 2 重前処理の有効性について,岐阜数理科学セミナー,2010 年 10 月 7 日,岐阜大学.
② 鞍点型問題に対する 2 重前処理,科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開,2010 年 10 月 19 日,京都大学.
③ 鞍点型問題に対する 2 重前処理の有効性について,九州大学数値解析セミナー,2010 年 11 月 2 日,九州大学.
④ 鞍点型問題に対する 2 重前処理の有効性について,数値解析と計算の信頼性評価,2010 年 11 月 21 日,長崎ハウステンボス.
⑤ 重調和問題に対する構成的誤差評価,科学計算の信頼性とその周辺に関するワークショップ,2011 年 11 月 25 日,西海国立公園九十九島ビジターセンター.

６．研究組織

(1)研究代表者

橋本　弘治（HASHIMOTO KOUJI）
中村学園大学短期大学部・幼児保育学科・講師
研究者番号：40455093