

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 6日現在

機関番号：62603

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740076

研究課題名（和文） 誤差項に非対称分布を仮定した円周上の確率過程の理論とその応用

研究課題名（英文） A circular stochastic process with asymmetric errors

研究代表者

加藤 昇吾 (KATO SHOGO)

統計数理研究所・大学共同利用機関等の部局等・助教

研究者番号：60468535

研究成果の概要（和文）：ある地点における1時間毎の風向を記録したデータや、渡り鳥の移動方向を一定時間おきに記録したデータは、個々の観測が円周上の点として表されることから、円周上に値をとる時系列データとみなすことができる。本研究では、Kato (2009) による円周上のマルコフ過程の拡張として、誤差項に非対称分布を仮定した円周上の自己回帰過程を提案し、その統計的性質の考察を行った。また、提案したモデルの応用を議論した。

研究成果の概要（英文）：Time series of circular data arise in a number of scientific fields. For example, a series of wind directions measured hourly at a weather station can be considered an example of time series of circular data. Another example is a time series of directions of movements of migratory birds observed in biology. In our study we have proposed a circular autoregressive process with asymmetric angular errors and investigated some properties of the proposed process. An application of the proposed model has been briefly discussed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：統計数学、円周上のデータ、非対称分布

1. 研究開始当初の背景

様々な科学分野において、観測値が角度として表されるデータが存在する。例えば、気象学における風向データはその一例である。風向は、北を0度とし、時計回りを正の向き

とすれば、東を90度、南を180度、西を270度のように角度で表すことができる。つまり、任意の風向は0度から360度までの角度 θ 、もしくは円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ として表現できる。他には、生物学における渡り鳥の移動方向のデータも同様に円周上のデータ

と解釈することができる。その他、医学や生命情報学の分野においても、円周上の点からなる集合として表されるデータが存在し、その具体的なデータは例えば Mardia and Jupp (2000) などに見ることができる。

また、円周上に値をとる時系列データも様々な分野において観測される。例えば、ある地点における1時間毎の風向を記録したデータや、渡り鳥の移動方向を一定時間おきに記録したデータは、個々の観測が円周上の点として表されることから、円周上に値をとる時系列データとみなすことができる。このような時系列データを解析するために有用な時系列モデルはどのように定義できるか、また、そのモデルの性質・統計的推測がどの程度議論できるか、という問題が円周上の時系列データの解析における1つの問題である。

過去には、Breckling (1989)、Fisher and Lee (1994)、Holzmann *et al.* (2006) らによって、円周上に値をとる時系列モデルが提案された。Breckling (1989) は、2つの確率過程、つまり von Mises 過程と wrapped 自己回帰過程、を提案した。また、Fisher and Lee (1994) は、自身の提案したモデルをオーストラリア首都特別地域の Black Mountain における風向の時系列データへと応用した。Holzmann *et al.* (2006) は円周上の時系列データのための隠れマルコフモデルを提案した。また、Kato (2009) は円周上に値をとるマルコフ過程を提案した。

2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」で述べたように、過去にはいくつかの円周上の時系列データのためのモデルが提案されてきた。しかし、これら既存のモデルで説明できる現象は限られており、円周上の時系列データにはこれら既存のモデルでは十分な当てはめを期待できないものが多く存在している。また、過去に提案されたモデルの統計的性質に関しては、十分な考察がなされていないことも問題である。特に近年、誤差項に非対称な確率分布を仮定した時系列モデルに関する研究の必要性が指摘されており、実用性と数学的な扱いやすさを併せ持つ新たな時系列モデルが望まれるところである。

このような問題に取り組むため、私は過去に円周上のマルコフ過程 (Kato, 2009) の提案を行った。今回の研究では、このモデルの拡張として、誤差項に非対称分布を仮定した円周上の自己回帰過程を提案し、その統計的

性質に関する考察を行った。また、提案したモデルの応用を議論した。

3. 研究の方法

研究の方法として、(a) (誤差項に対称分布を仮定した) 円周上の自己回帰過程の構築、(b) 円周上の非対称分布の提案と自己回帰過程への応用、(c) 提案したモデルの統計的推測理論と応用、の3つのステップに分けて研究を行った。以下、具体的にそれぞれのステップについて述べていくことにする。

始めに、「(a) (誤差項に対称分布を仮定した) 円周上の自己回帰過程の構築」について述べる。Kato (2009) は、(誤差項に対称分布を仮定した) 円周上のマルコフ過程を提案した。本研究では、このモデルの拡張として、円周上の自己回帰過程の提案を行った。この拡張は、マルコフ性を仮定できないデータに対しても、モデル化の可能性を与えることを目的としている。誤差分布としては Kato (2009) と同様、この段階では対称分布を仮定した。そして、その自己回帰過程の統計的性質について考察を行った。

次に「(b) 円周上の非対称分布の提案と自己回帰過程への応用」について紹介する。上述の(a)で提案したモデルは、誤差分布に対称分布を仮定していた。そのモデルの発展として、(b)の研究では2つの研究(つまり、円周上の非対称確率分布の提案と、その非対称分布を誤差項として仮定した自己回帰過程に関する研究)を行った。これは、(a)で提案したモデルをより flexible にすることで、より多様な時系列データへの当てはめを期待できるモデルを与えることを目的としている。

最後に、「(c) 提案したモデルの統計的推測理論と応用」の研究に取り組んだ。この研究では、(a)と(b)で提案した時系列モデル、および(b)の非対称分布の統計的推測について研究を行った。そして、その理論を風向の時系列データのモデル化へと応用の可能性を議論した。

4. 研究成果

以下、(1) 2010年度、(2) 2011年度、(3) 2012年度の研究成果について述べていく。

(1) 1年目にあたる2010年度には、誤差項に対称分布を仮定した円周上の自己回帰過程の構築を行った。自己回帰過程の構築においては、Fisher and Lee (1994) によるリンク関数を用いた円周上の自己回帰過程の導出法を利用し、リンク関数に正接関数を仮定

することで自己回帰過程を導出した。また誤差分布としては、この段階では対称分布である Wrapped Cauchy 分布 (以下、WC 分布) を仮定した。この自己回帰過程は Kato (2009) によるマルコフ過程の1つの拡張となっている。つまり、Kato (2009) のモデルでは、過去の状態を所与としたときの時間 $t+1$ の状態 W_{t+1} の条件付き分布が、時間 t の状態 W_t にのみ依存するモデルであったのが、今回のモデルではより一般に、 $W_t, W_{t-1}, \dots, W_{t-p}$ に依存する拡張モデルとなっている。この自己回帰過程は、時間 t における分布が WC 分布になるなどの解析的に扱いやすい幾つかの性質が成り立つことを示すことができた。また、自己回帰過程の挙動についても考察を行い、パラメータの解釈についても議論を行った。その結果、本研究で提案されたモデルを応用することにより、既存のモデルは記述できなかった時系列における現象を記述することが可能となることがわかった。

(2) 2年目にあたる 2011 年度には「円周上の非対称確率分布の提案と自己回帰過程への応用」を行った。この研究は、実質2つの研究からなっている。まず1つ目の研究として、「(i) 誤差分布のための円周上の非対称確率分布の提案」に取り組み、それから、「(ii) 誤差分布として (i) で提案した非対称分布を仮定した自己回帰過程の統計的性質の考察」をする、という流れで研究を行った。

まず、1つめの研究「(i) 誤差分布のための円周上の非対称確率分布の提案」の結果について述べる。2010 年度に提案した自己回帰過程においては、誤差項に対称分布である WC 分布を仮定していた。この分布は2つのパラメータから成り、1つは位置を、他方は尺度を調節する役割をもつ。この分布を一般化した確率分布、具体的には WC 分布を特別の場合として含み、分布の歪度と裾を調節できる確率分布、の提案を行った。そして、その確率分布の統計的性質について議論した。これにより、非対称もしくは裾が重いデータに対しても満足な当てはめを期待できるモデルを与えることができた。

そして、次に「(ii) 誤差分布として (i) で提案した非対称分布を仮定した自己回帰過程の統計的性質の考察」を行った。特に重点的に調べたことは、誤差項に WC 分布ではなく、(i) の研究で提案したより flexible な非対称確率分布を仮定することで、WC 分布を仮定した 2010 年度のモデルでは説明できなかったような挙動を示すことができるのか、という点である。そして、提案された自己回帰過程は、誤差分布が非対称となる性質により、既存のモデルは記述できなかった時系列におけるいくつかの現象を記述する

ことが可能となることがわかった。

(3) 最終年度にあたる 2012 年度には、3つのテーマで研究を行った。初めに、「(I) 2010・2011 年度で提案したモデルの統計的性質に関する考察」に取り組み、次に「(II) 円周上に値をとる連続時間確率過程の提案」、そして、「(III) 提案したモデルの円周上の時系列データへの応用に関する議論」を行った。

まず初めに、「(I) 2010・2011 年度で提案したモデルの統計的性質に関する考察」について述べる。ここで、「2010・2011 年度で提案したモデル」というのは、2010 年度の (誤差項に対称分布を仮定した) 円周上の自己回帰過程、および、2011 年度の非対称な誤差項を持つ円周上の自己回帰過程のことを指している。今年度は、これら2つの自己回帰過程に関して更なる考察を行った。そして、2つの自己回帰過程が、パラメータのとり方によってどのような挙動の違いを見せるかについて更なる結果を得ることができた。また、2つの自己回帰過程のパラメータ推定についても議論した。

次に、「(II) 円周上に値をとる連続時間確率過程の提案」および「(III) 提案したモデルの円周上の時系列データへの応用に関する議論」について述べる。2010・2011 年度で議論した自己回帰モデルは、離散時間の時系列データのためのモデルであった。それに対し (II) の研究では、連続時間の現象のための円周上の確率過程を議論している。研究では、新たな確率過程の定義を与え、そのパラメータの解釈およびパラメータ推定に関して結果を得ることができた。そして、(III) の研究においては、2010・2011 年度で提案した自己回帰過程と (II) の確率過程に関して、風向の時系列データへの応用の可能性を議論した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計5件)

- ① Kato, S. and Jones, M. C., An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions via Brownian motion. *Bernoulli*, 査読有, 19, 154-171, 2013, doi:10.3150/11-BEJ397.
- ② 加藤昇吾, 円周上のコーシー分布と関連した統計モデル. 日本数学会 2012 年度 秋季総合分科会 講演アブストラクト, 査読無, 105-121, 2012.
- ③ Kato, S. and Eguchi, S., Robust

estimation of location and concentration parameters for the von Mises-Fisher distribution. arXiv:1201.6476, 査読無, 1-37, 2012, <http://arxiv.org/abs/1201.6476>.

- ④ Eguchi, S., Komori, O. and Kato, S., Projective power entropy and maximum Tsallis entropy distributions. Entropy, 査読有, 13, 1746-1764, 2011, doi:10.3390/e13101746.
- ⑤ Kato, S., A Markov process for circular data. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)], 査読有, 72, 655-672, 2010, doi:10.1111/j.1467-9868.2010.00748.x.

[学会発表] (計20件)

- ① 加藤昇吾, Trigonometric moment によって特徴づけられる円周上の確率分布. 統計数理セミナー, 2012年10月10日, 統計数理研究所, 立川.
- ② 加藤昇吾, 円周上のコーシー分布と関連した統計モデル. 日本数学会 2012年度 秋季総合分科会, 2012年9月20日, 九州大学, 福岡.
- ③ 加藤昇吾, Jones, M.C., A family of distributions on the circle with links to, and an application arising from, Möbius transformation. 2012年度 統計関連学会連合大会, 2012年9月11日, 北海道大学, 札幌.
- ④ Kato, S., Regression analysis of circular data. Workshop on Directional Statistics, 2012年7月5日, Satellite Office of the Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, Japan.
- ⑤ Kato, S. and Eguchi, S., Robust estimation of location and concentration parameters for the von Mises-Fisher distribution. The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, 2012年7月4日, Tsukuba University, Tsukuba, Japan.
- ⑥ Kato, S., A family of circular distributions arising from Brownian motion. Keio-Yonsei Workshop, 2012年5月24日, Keio University, Yokohama, Japan.
- ⑦ Kato, S., A Möbius transformation induced distribution on the torus. ISM-ISI-ISSAS Joint Conference 2012, 2012年2月3日, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, Japan.
- ⑧ Kato, S., Jones, M.C., An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions via Brownian motion. International Conference on Advances in Probability and Statistics - Theory and Applications: A Celebration of N. Balakrishnan's 30 Years of Contributions to Statistics, 2011年12月29日, Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China.
- ⑨ 加藤昇吾, Jones, M.C., An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions. 2011年度 統計関連学会連合大会, 2011年9月7日, 九州大学, 福岡.
- ⑩ Kato, S., An extension of the wrapped Cauchy distribution via Brownian motion. Complex Phenomena from Statistical Point of View -Seismology, Environmentology and Economy-, 2011年9月1日, Meiji University, Kawasaki, Japan.
- ⑪ 加藤昇吾, 2変量角度データのための確率分布と関連した統計モデル. 統計数理セミナー, 2011年6月29日, 統計数理研究所, 立川.
- ⑫ Kato, S., A Markov process for circular data. Seminar on Mathematical Sciences Based on Modeling, Analysis and Simulation, 2011年2月24日, Meiji University, Kawasaki, Japan.
- ⑬ 加藤昇吾, A distribution for a pair of unit vectors generated by Brownian motion. 今野・梶原研究室セミナー, 2011年2月8日, 横浜国立大学, 横浜.
- ⑭ 加藤昇吾, Jones, M.C., A family of distributions on the circle with links to Möbius transformation. 日本数学会 2010年度 秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学, 名古屋.
- ⑮ 加藤昇吾, 角度データの回帰分析. 統計数理研究所 共同利用研究集会「生物群集の多様性と統計数理」, 2010年9月14日, 統計数理研究所, 立川.
- ⑯ 加藤昇吾, 円周上に値をとるマルコフ過程. 統計数理セミナー, 2010年5月19日, 統計数理研究所, 立川.
- ⑰ 加藤昇吾, A Markov process for circular data. 統計数学セミナー, 2010年4月28日, 東京大学, 東京.
- ⑱ Kato, S., A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius

transformation. Two-Day Conference on Statistics and Probability, 2010年1月22日, Indian Statistical Institute, Kolkata, India.

- ⑱ 加藤昇吾, Jones, M.C., A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation. 科研費研究集会「非対称分布の統計学」, 2009年11月25日, 慶應義塾大学, 横浜.
- ⑳ Kato, S., A Markov process for circular time series. Workshop “Directional, Asymptotic, Differential-Geometric Statistics and Related Area”, 2009年11月6日, Osaka Prefecture University, Sakai, Japan.

[その他]

ホームページ等

http://www.ism.ac.jp/souran/kenkyusya/kato_shogo.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 昇吾 (KATO SHOGO)

統計数理研究所・大学共同利用機関等の部局等・助教

研究者番号 : 60468535

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし