

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 15 日現在

機関番号：12611

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740083

研究課題名(和文) 拡散過程のカップリング法に基づく幾何解析の展開

研究課題名(英文) Development of geometric analysis based on coupling methods for diffusion processes

研究代表者

桑田 和正 (KUWADA, Kazumasa)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授

研究者番号：30432032

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：通常可微分構造を持たない特異空間上で、関数空間上の勾配曲線としての熱分布の2種の異なる定式化を同定した。これを用いて、「Ricci曲率が下に有界」の最適輸送理論による特徴づけから、熱分布の微分評価による特徴づけを導出した。

また、確率解析を用いて、上記の議論で曲率条件の一種として現れる熱分布間のWasserstein距離の評価をRicci流の下で拡張した。加えて、その評価をPerelmanのL距離が定めるWasserstein型の距離に拡張した。

さらに、拡散過程の鏡映カップリングの特性を最適輸送を用いて定式化した。これを利用し、Riemann多様体の極限である特異空間上へ同様の性質を拡張した。

研究成果の概要(英文)：On singular spaces admitting no differentiable structure, we identify two different formulations of heat flows as gradient flows. As a result, we prove an implication from a formulation of the presence of a lower Ricci curvature bound via optimal transport to another one via the gradient estimate of heat semigroups.

By using stochastic analytic techniques, we extend an estimate of the Wasserstein distance between heat distributions which appears as a kind of curvature condition in the above argument to the one on Ricci flows. In addition, we extend it to the one associated with the Wasserstein-like distance defined by using Perelman's L-distance.

We obtain a formulation of a characteristic property of the mirror coupling in terms of optimal transport. By using this formulation, we proved that the same property holds on a class of singular spaces given by limit of Riemannian manifolds.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：拡散過程 カップリング Ricci曲率 Wasserstein距離 Ricci流 曲率次元条件 熱半群の微分評価 Hopf-Lax半群

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 近年、「Ricci 曲率が下に有界」に相当する概念について、最適輸送理論による定式化が与えられた。この条件に基づき、測度距離空間上の幾何解析に大きな転機が来ようとしていた。一方、Riemann 多様体上では上記の条件は熱半群の微分評価による解析的な定式化、あるいは Brown 運動の平行カップリングによる確率論的な定式化と同値になると知られていた。しかしながら、より一般の空間では統合の是非あるいはその道筋は明らかではなかった。特に熱半群による定式化は Bakry-Emery 理論として知られており、抽象的な設定で機能する膨大な成果がある。そのため、この統合を実現することには応用上も大きな意義があった。

(2) 劣 Riemann 多様体や Ricci 流等、滑らかな多様体上ではあるが通常の Riemann 多様体から外れた構造を持つ空間でも、類似の問題があった。これらの空間では、条件自体が質的に異なるものでなければならず、新しい観点の導入が望まれていた。

(3) Brown 運動に対する鏡映カップリングと呼ばれる、平行カップリングとは別のカップリングも Ricci 曲率と深い関係があり、幾何解析に幅広い応用を持つ。反面、通常の Riemann 多様体を超えた空間での鏡映カップリングの構成・解析は、やはり未解決であった。

### 2. 研究の目的

(1) 最適輸送理論に基づく Ricci 曲率の条件の下で、抽象的に与えられた測度距離空間上で Brown 運動の平行カップリング、あるいはそれに対応する Wasserstein 距離の評価を導く。それを土台として熱半群の微分評価による解析的な定式化との橋渡しをすることで、Ricci 曲率の下限に関する各分野からのアプローチを統合する。

(2) 劣 Riemann 多様体や Ricci 流等の「Riemann 多様体に近い」空間で、その質的な違いを反映するよう、「Ricci 曲率が下に有界」に対応する諸条件を拡張し、それらの間の関係を調べる。特に拡散過程のカップリングに重点を置く。

(3) 「Ricci 曲率が下に有界な測度距離空間」「劣 Riemann 多様体」「Ricci 流」の各々の空間族に対して、その幾何的特性を反映した鏡映カップリングを構築・解析し、熱方程式の解の微分評価等に応用する。

### 3. 研究の方法

(1) Otto の発見的考察では、熱分布は確率測度の成す空間 ( $L^2$ -Wasserstein 空間) 上の相対エントロピーの勾配曲線とみなせる。この観点では、目的とする Wasserstein 距離の評価は、最適輸送理論に基づく Ricci 曲率の下限から自然に従うと考えられる。 $L^2$ -空間上での Dirichlet エネルギーの勾配曲線としての熱分布を、厳密な意味での Wasserstein 空

間上の勾配流の理論の枠組みでエントロピーの勾配曲線と同定することで、必要な評価を導く。

(2) 劣 Riemann 多様体や Ricci 流の上で、確率過程のカップリングを構成し、その性質を解析することで、どのような Wasserstein 距離の評価が成り立つかを調べる。また、そこで得た評価を足掛かりに、その他の定式化をどのように与えればよいかを Riemann 多様体の場合の既存の理論を踏まえながら考察し、与えた条件に対して、実際の対応関係を調べていく。

(3) 空間の微分構造に基づく議論を避けるため、鏡映カップリングを特徴付ける性質を最適輸送理論を用いて定式化する。その性質を Ricci 曲率が下に有界な特異空間上で調べることで、鏡映カップリングに相当するカップリングを構成する。

### 4. 研究成果

(1) 断面曲率が下に有界な Riemann 多様体の自然な拡張として現れる特異空間である Alexandrov 空間において、前述の考え方に基づき、熱分布間の Wasserstein 距離の評価を導いた。また、その応用として、熱半群の Bakry-Emery 微分評価を得た [4]。特異空間上でのエントロピーの勾配曲線と Dirichlet エネルギー汎関数の勾配曲線としての熱分布の同定のために、従来とは全く異なる方法を提唱した。その証明で用いた技法の一部は、熱分布の解析を最適輸送理論と結合する基本的な道具のひとつになっている。また、この研究に着想を得て、Ambrosio, Gigli, Savare らにより、ここでの手法がより一般の特異空間へと拡張された。結果として、本研究成果はこの方面での理論の爆発的な発展の起点となった。本研究成果は Bakry-Emery 理論が特異空間に適用されたある意味で初めての例でもあり、その観点からも興味深い。さらに、Erbar, Sturm との共同研究により、Ambrosio らの結果を、Ricci 曲率の下限と次元の上限の双方を加味した条件へと拡張することに成功した。この研究は、この方面でのそれまでの成果を補完・統合するものであり、今後の当該分野での研究の基石たり得る結果と考えられ、既に多くの研究者がこの成果を土台とした研究を開始している。

(2) 劣 Riemann 多様体に対しては、十分な成果を上げることはできなかった。Ricci 流に対しては、Riemann 多様体でのカップリングの構築法を拡張することで、平行カップリングおよび鏡映カップリングの構成と解析に成功した [5]。証明に用いた、時間依存計量下での測地的ランダムウォークによるブラウン運動の近似(不変原理)自体も、興味深い成果と言える。その評価を土台に、通常距離に基づく Wasserstein 距離だけでなく、Perelman の導入した  $L$  距離が定める

Wasserstein 型距離に対しても同様の評価を導くことができた[7]。既存の最適輸送に基づく結果を復元したのみならず、確率的アプローチの利点を生かして、空間のコンパクト性の過程を弱めることができた。L 距離は Ricci 流の解析において重要な役割を果たす量であり、今後一層の研究の進展が望まれる。また、関連する問題である、Markov 核の作用に関する Wasserstein 型距離の評価と微分評価の双対性に対して、当該方面の基礎理論を整備・拡張する研究を行った[1]。この成果は直接 Ricci 流の解析には適用できないが、ここで利用したアイデアは、今後の Ricci 流の解析にも適用可能と考えている。

(3) Riemann 多様体上で、時間パラメータに依存する新たな輸送費用関数を導入し、それに基づく熱分布間の最適輸送費用の単調性が鏡映カップリングの特性に対応することを明らかにした[2]。この定式化は、最適輸送理論の意味で Ricci 曲率が下に有界な空間ではまだ検証できていないが、その一方でこの単調性は Gromov-Hausdorff 収束で不変であることを明らかにした。結果として、Riemann 多様体の極限に現れる広いクラスの特異空間上へと、同様の性質を拡張することができた。

また、これらの成果を一般的な枠組みで導出しようとする過程で、一般の Bakry-Emery Ricci テンソルに基づく正曲率・有限次元の曲率次元条件の下で、空間の直径に明示的な上限が存在すること、および、その上限が実現されるのは球面に限ることを明らかにした[3]。その証明には、標準的に対応する拡散過程に対する確率解析を用いる。勾配型ベクトル場に対応する Bakry-Emery Ricci テンソルは測度距離空間の枠組みで自然に捉えることができるが、一般の場合にはその幾何学的な意味は明らかになっていない。それにも関わらず幾何学的な結論が導出されたことは、さらなる深い数学的構造が背後に感じられる点で興味深い。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 9 件)

[1] K. Kuwada “Gradient estimate for Markov kernels, Wasserstein control and Hopf-Lax formula” *Potential Theory and its Related Fields*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B43 (2013) 61-80.

[2] K. Kuwada, K.-T. Sturm “Monotonicity of time-dependent transportation costs and coupling by reflection” *Potential Analysis* Vol. 39, no.3 (2013) 231-263.  
DOI: 10.1007/s11118-012-9327-4

[3] K. Kuwada “A probabilistic approach to the maximal diameter theorem” *Mathematische Nachrichten* Vol. 286, no.4 (2013) 374-378.  
DOI: 10.1002/mana.201100330

[4] N. Gigli, K. Kuwada, S. Ohta “Heat flow on Alexandrov spaces” *Communications on Pure and Applied Mathematics* Vol. 66, no.5 (2013) 307-331. DOI: 10.1002/cpa.21431

[5] K. Kuwada “Convergence of time-inhomogeneous geodesic random walks and its application to coupling methods” *Annals of Probability* Vol. 40, no. 5 (2012) 1945-1979. DOI: 10.1214/11-AOP676

[6] K. Kuwada, R. Philipowski “Non-explosion of diffusion processes on manifolds with time-dependent metric” *Mathematische Zeitschrift* Vol. 268, no. 3 (2011) 979-991.  
DOI: 10.1007/s00209-010-0704-7

[7] K. Kuwada, R. Philipowski “Coupling of Brownian motions and Perelman's L-functional” *Journal of Functional Analysis* Vol. 260, no. 9 (2011) 2742-2766.  
DOI: 10.1016/j.jfa/2011.01.017

[8] S. Kusuoka, K. Kuwada, Y. Tamura “Large deviation for stochastic line integrals as  $L^p$ -currents” *Probability Theory and Related Fields* Vol. 147, no. 3-4 (2010) 649-674.  
DOI: 10.1007/s00440-009-0219-5

[9] K. Kuwada “Duality on gradient estimates and Wasserstein controls” *Journal of Functional Analysis* Vol. 258, no. 11 (2010) 3758-3774.  
DOI: 10.1016/j.jfa.2010.01.010

〔学会発表〕(計 31 件)

[1] K. Kuwada “The entropic curvature dimension condition and Bochner's inequality” 確率論シンポジウム, 2013 年 12 月 20 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

[2] K. Kuwada “The entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality” Conference ProbaGeo 2013, 2013 年 10 月 31 日, ルクセンブルク大学(ルクセンブルク, ルクセンブルク)

[3] K. Kuwada “Time inhomogeneous

couplings for diffusion processes on Riemannian manifolds” Geometric aspects in probability and analysis, 2013年9月14日, イエナ大学(イエナ, ドイツ)

[4] K. Kuwada “Entropic curvature dimension condition and Bochner's inequality” Dirichlet forms and applications, German-Japanese conference on stochastic analysis, 2013年9月11日, ライプチヒ大学(ライプチヒ, ドイツ)

[5] K. Kuwada “The entropic curvature dimension condition and Bochner's inequality” Geometry and Probability, 2013年8月10日, 京都大学(京都府京都市)

[6] K. Kuwada “Extensions of the duality in gradient estimates and Wasserstein controls” Connections for Women on the concentration of measure phenomenon: examples, applications and links to functional inequalities and to optimal transport, 2013年3月8日, 名古屋大学(愛知県名古屋市)

[7] K. Kuwada “Wasserstein contractions associated with the curvature-dimension condition” マルコフ過程と確率解析, 2013年1月13日, 京都大学(京都府京都市)

[8] K. Kuwada “Wasserstein contractions associated with the curvature-dimension condition” ERC Workshop on Optimal Transportation and Applications, 2012年11月9日, ピサ高等師範学校(ピサ, イタリア)

[9] K. Kuwada “Wasserstein contractions associated with the curvature-dimension condition” Stochastic analysis and applications (German-Japanese bilateral research project), 2012年9月27日, 岡山大学(岡山県岡山市)

[10] 桑田和正 「熱分布の結合法と次元曲率条件」日本数学会 2012年度秋期総合分科会統計数学分科会(特別講演), 2012年9月18日, 九州大学(福岡県福岡市)

[11] K. Kuwada “An extension of Wasserstein contraction associated with the curvature-dimension condition” 6th international conference on stochastic analysis and its applications, 2012年9月10日, ベドレヴォ会議場(ベドレヴォ, ポーランド)

[12] K. Kuwada “Applications of Hopf-Lax formulae to analysis of heat

distributions” RIMS workshop Potential theory and its related fields, 2012年9月4日, 京都大学(京都府京都市)

[13] K. Kuwada “Optimal transportation costs of heat distributions in stochastic geometric analysis” UK-Japan mathematical forum on geometry, probability and their applications, 2012年7月19日, 慶応大学(神奈川県横浜市)

[14] K. Kuwada “Monotonicity of time-dependent transportation costs and coupling by reflection” Optimal transportation and differential geometry, 2012年5月22日, バンフ国際研究ステーション(バンフ, カナダ)

[15] 桑田和正 “A probabilistic approach to the maximal diameter theorem” 日本数学会年会 2012年度年会 統計数学分科会 2012年3月26日, 東京理科大学(東京都新宿区)

[16] 桑田和正 “Identification of heat flows” 第13回 非線形偏微分方程式研究会, 2012年3月5日, 早稲田大学(東京都新宿区)

[17] 桑田和正 「Wasserstein 距離にまつわる確率解析」 確率論シンポジウム, 2011年12月20日, 関西大学(大阪府吹田市)

[18] 桑田和正 「Bakry-Émery の微分評価と関連する話題」 確率解析とその周辺, 2011年11月12日, 佐賀大学

[19] K. Kuwada “Optimal transport and coupled diffusion by reflection” Geometry and Probability, 2011年9月16日, 熊本大学(熊本県熊本市)

[20] K. Kuwada “Optimal transport and coupled diffusion by reflection” 5th international conference on Stochastic analysis and its applications (contributed talk), 2011年9月6日, ボン大学(ボン, ドイツ)

[21] 桑田和正 「最大直径定理に対する確率論的アプローチ」 2011年度確率論ヤングセミナー, 2011年8月2日, 潮来ホテル(茨城県潮来市)

[22] K. Kuwada “Heat flow on Alexandrov spaces” 35th conference on Stochastic Processes and their Applications (invited special session), 2011年6月21日, Hotel Mission de Los Angeles (オアハカ, メキシコ)

[23] 桑田和正 “Coupling of Brownian motions associated with a time-dependent metric” リーマン幾何と幾何解析, 2011年2月18日, 筑波大学(茨城県つくば市)

[24] 桑田和正 “Invariance principle for time-inhomogeneous geodesic random walks” Markov 過程と関連する話題, 2011年1月30日, 関西大学(大阪府吹田市)

[25] K. Kuwada “Heat flow on Alexandrov spaces” Probability and PDE, 2011年1月11日, 広島大学(広島県東広島市)

[26] 桑田和正 “Duality on gradient estimates and Wasserstein controls” 確率論シンポジウム, 2010年12月21日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

[27] 桑田和正 “Heat flow on Alexandrov spaces” 確率論シンポジウム, 2010年12月21日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

[28] 桑田和正 “Coupling methods for diffusion processes under time-dependent metric” 確率解析とその周辺, 2010年11月13日, 岡山大学(岡山県岡山市)

[29] K. Kuwada “Duality on gradient estimates and Wasserstein controls” 34th conference on Stochastic Processes and Their Applications (open contributed session), 2010年9月7日, 千里ライフサイエンスセンター(大阪府豊中市)

[30] K. Kuwada “Coupling methods under a backward Ricci flow” 4th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2010年9月2日, 関西大学(大阪府吹田市)

[31] K. Kuwada “Duality results on gradient estimates and Wasserstein controls” 40th Saint-Flour Probability Summer School, 2010年7月9日, Maison des Planchettes(サン・フルール, フランス)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織  
(1) 研究代表者

桑田 和正 (KUWADA, Kazumasa)  
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授  
研究者番号: 30432032

(2) 研究分担者  
なし

(3) 連携研究者  
なし