科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：13201
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：22740084
研究課題名（和文）　境界条件に微分を含むストークス作用素の解析とその応用

研究課題名（英文）　Analysis of the Stokes operator with some boundary conditions of Neumann type and its application

研究代表者
山口　範和（YAMAGUCHI NORIKAZU）
富山大学・人間発達科学部・准教授
研究者番号：50409679

研究成果の概要（和文）：　流体力学に現れる非線形偏微分方程式として，Navier-Stokes 方程式と MHD 方程式について研究を行った。MHD 方程式について，3 次元有界単連結領域における定常流の指数安定性の結果を得た。また，全空間において Navier-Stokes 方程式に対する処罰法の数学的正当化について考え，処罰法による近似問題の解が真の解へ収束する事を解析半群の理論を用いて証明した。

研究成果の概要（英文）：　We studied the Navier-Stokes equations and MHD equations arising from fluid mechanics. On the MHD equations, we obtained a stability theorem of exponential type in three-dimensional bounded and simply connected domain. We also studied validity of the penalty method for the Navier-Stokes equations in the whole space. For such a problem, we obtained a mathematical justification result by method of analytic semigroup theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１２年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,　000	2,860,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：Stokes 作用素，Navier-Stokes 方程式，MHD 方程式，安定性，処罰法，数学的正当化，解析半群

１．研究開始当初の背景

本研究では，研究題目にもあるように境界条件が導関数を含む場合，即ち Neumann 型の境界条件を伴う Stokes 作用素に興味があった。

こうした作用素は MHD 方程式の磁束密度部分の方程式に対する主要部として，滑り条件を伴う Navier-Stokes 方程式の主要部として，また極性流体系で流体の渦度と微小粒子の角速度場が境界上で相互作用を持つ場合など，流体力学の数学解析の様々な場面に現れる。

関数解析的な手法で，Navier-Stokes 方程式や MHD 方程式，極性流体方程式等を取り扱う際にはこうした作用素の性質が重要となる。特に，その作用素の分数巾の評価や，

その作用素が解析半群の生成作用素であるかどうか，最大正則性定理を満たすか，などである。こうした性質を明らかにすることによって，関数解析的な手法で問題の適切性や定常解の存在とその安定性などが議論できるようになる。

境界条件に微分を伴う Stokes 作用素に関しては，粘着条件（斉次 Dirichlet 条件）を伴う場合とは異なり，領域の位相幾何的性質が解の一意性に強く関係する。例えば，自由滑り条件の場合には所謂 Rigid space と呼ばれる空間を考える必要があり，完全導体壁を 3 次元空間で考える場合には第 1Betti 数が 0 という条件が必要となる。

本来は，完全導体壁条件を伴う Stokes 作用素を中心に，こうした条件がない場合の考察などを行いたかったが，そこまでは研究が進展しなかった為，今後の課題としたい。

２．研究の目的

Navier-Stokes 方程式や MHD 方程式等の流体力学に現れる非線形偏微分方程式に対する Hadamard の意味での適切性や解の漸近挙動，定常流の安定性を数学解析の立場から示すことが本研究の目的であった。

これらの方程式を抽象発展方程式として，即ち適当な Banach 空間上の常微分方程式として捉え直す際には Stokes 作用素と呼ばれる作用素を考える必要が生じる。この点が通常の非線形放物型偏微分方程式と異なる部分であり，流体の速度場や磁束密度が発散ゼロ条件（ソレノイダル条件）を満たす制限を受けている事による。Stokes 作用素を用いることで，自動的に発散ゼロ条件を満たすような関数空間で解を探すことになる。また，同時に方程式から圧力項のようなスカラー関数の勾配によって表現された項を見かけ上消去することが可能である。

繰り返しになるが，本研究では境界条件が導関数を含む場合の Neumann 型の境界条件を伴う Stokes 作用素に興味があった。こうした作用素は応用上様々な場面に登場することは研究開始当初の背景で述べた通りである。

また，当初の研究計画に加えて，これらの流体の方程式に対する処罰法の数学的正当化についての研究を開始した。非圧縮性粘性流体の運動方程式では圧力場が時間発展の構造を持たないことが，困難の一つとなる。これは数学解析においても数値解析においても共通の難しさである。

Navier-Stokes 方程式を数値的に取り扱う際に，圧力項が時間発展をしないことが難しさを招く事は既に述べた。数値解析では圧力項を消去する方法として，各種の方法が考えられているが，Temam（1968）による処罰法もそうした方法の一つである。これは微小パラメータ（処罰パラメータ）を用いて，非圧縮条件を速度場と圧力の間での関係式に取り替えるものであり，形式的には処罰パラメータの極限として元の非圧縮条件が回復される。しかし，それはあくまでも形式的な議論に過ぎず，数学的な正当化が必要である。研究開始当初まで，有界領域における処罰法の正当化に関しては Temam（1968）や J. Shen(1995)等の結果が知られていたものの，筆者の知る限りにおいては非有界領域での成果は知られていなかった。一方で，流体力学の立場からは非有界領域での流れの解析が重要である。そうした状況を鑑み，本研究では非有界領域上での処罰法の正当化を目指して，全空間における初期値問題の正当化から研究を開始した。なお，境界を伴う問題を考える際には，元の問題の境界条件が粘着条件であったとしても，処罰法の適用によって境界条件として微分を伴う Stokes 作用素を考える必要が生じる場合がある。

３．研究の方法

本研究では関数解析的な手法と半群理論を主な道具として研究を行った。これらは非線形偏微分方程式の解析手法としては標準的なものである。

(1) MHD 方程式については通常の Stokes 作用素を完全導体壁と呼ばれる Neumann 型の境界条件を伴う Stokes 作用素を用いて，定常問題を抽象的な表現へ書きなおし，定常解の一意存在定理を示し，更に定常解の周りでの線形化作用素の生成する半群の性質を調べることで定常解の安定性について議論した。

(2) 処罰法の正当化については，最終的な目標は各種の非有界領域で正当性を証明することであるが，本研究ではその為の出発点として境界を伴わない全空間の問題を考えた。処罰法を用いて，近似問題を流束のみの問題へ書き直す。このとき，得られる近似問題の解は処罰法のパラメータに依存する。そこで，線形化問題のモデル問題である熱方程式の解に対するパラメータ込みの評価を用いることで，解のパラメータ依存性を測る事が可能となる。

全空間における Helmholtz 射影を用いることで，近似問題は非圧縮部分とそうでない部分へ分解される。特に，線形化問題（Stokes 方程式）の場合は，いずれも熱方程式と本質的に同じである為，上で述べた熱方程式の解の評価を用いることで解の時間に関する原点付近での特異性や無限遠方での減衰，パラメータに関する減衰の度合いは所謂 Lp-Lq タイプの評価より導かれる。但し，圧力項を評価し直す際には Lp-Lq 評価だけではパ

ラメータの減衰オーダーが足りない。そこで，ヘルムホルツ射影の特徴付けへ戻り，density argument を用いて足りない部分を評価した。

非線形問題については，線形化問題の解の評価を用いて関数解析的な方法により解を構成し，パラメータに関する減衰を導いた。但し，ここで考えた解は小さい時間大域解または時間局所解のみであり，任意の大きさの初期値に対する時間大域的な解については考えていない。

４．研究成果

(1) MHD 方程式の安定性について

最初に定常解の一意存在を証明した。定常問題を Stokes 作用素によって関数空間上の問題へ書き直す。このとき，このとき，領域の有界性と Stokes 作用素の性質から問題は不動点型の問題へ帰着される。従って，不動点定理が適用出来るように評価を進めればよい。

通常の Stokes 作用素については,Giga and Miyakawa (1985) 等により，その分数巾の評価は知られている。また，完全導体壁を伴う Stokes 作用素について同様の分数巾の評価を導き,Banach の不動点定理を用いて定常流の一意存在を証明した。但し,流体の粘性係数が大きく,伝導度が小さいという条件を課した。これは電磁流体の運動が比較的穏やかな状況を考えた事に対応する。

次に，得られた定常流の安定性について，指数安定性の結果を得た。定常解の周囲で問題を線形化し，得られる線形化作用素の性質を調べた。これは低階部分については変数係数を伴う作用素であるが，主要部については定数係数である。従って，上で考えた Stokes 作用素からの摂動として扱うことが可能になる。定常流が必要に応じて小さいという過程の下で，線形化作用素は解析半群の生成素であり，かつ熱伝導方程式の解などと同様の Lp-Lq 型評価を満たすことが示される。また，領域の有界生から時間無限大の減衰オーダーは指数関数的であることが従う。

時間発展問題を定常解からの初期摂動問題として定式化しなおし，この初期摂動問題の時間大域解の存在と解の減衰を調べることで安定性を結論できる。線形化作用素の生成する半群の性質を利用すれば，Kato (1984) 等と類似の方法により，初期摂動が小さい場合の時間大域解の存在と解の指数減衰を得る。これにより安定性が証明される。得られた成果に関しては，細部の検証を行い，現在論文の投稿を準備しているところである。

(2) Navier-Stokes 方程式に対する処罰法の正当化について

研究の目的の項でも述べたように，これまで非有界領域における処罰法の数学的正当化については研究成果が得られていなかった。

本研究では非有界領域上の研究の出発点として全空間における初期値問題を考えた。

処罰法を用いると，Navier-Stokes 方程式より，速度場のみを未知関数にもつ近似問題を得る。この問題の線形化問題の解の評価が最初の問題となるが，Helmholtz 射影を用いることで，速度場については拡散係数が 1 (=粘性係数。元の問題でも粘性係数は 1 としている為) の熱伝導方程式となり，スカラーポテンシャル部分については拡散係数が 1+処罰法のパラメータの熱伝導方程式となる。従って，熱伝導方程式の解に対する Lp-Lq 評価を用いればこれらの解を評価する事が出来る。但し，ここで重要な事はこうした評価をパラメータ込みで行うことである。

この Lp-Lq 評価により Stokes 流に関しては概ね処罰法は正当化されるが，初期速度場と解の属する関数空間が同じである場合や圧力項については評価が不十分である。そこで，スカラーポテンシャルの部分は Helmholtz 射影に立ち戻り，考察をやりなおす。ベクトル場がスカラー関数の勾配として表現されていて，尚且つスカラー関数はオーダー1 の斉次 Sobolev 空間に属する事を用いれば,評価を良くする事が出来る。この事実と半群の性質からパラメータに関する減衰レートを 1/2 だけ良くすることが出来,Stokes 流に関しては処罰法が正当化される。

Navier-Stokes 方程式系についても同様に Helmholtz 射影を用いて，問題を再定式化する。これにより，近似問題は連立の非線形発展方程式系となる。この発展方程式系を積分方程式系へ書き直し，不動点定理を用いて解の存在と一意性について議論を行った。この部分自体は標準的である。線形化問題の解の性質から，処罰法のパラメータへの依存度合いを評価する事が出来る。これにより，速度場とその空間 1 階微分に関しては，パラメータ極限として元の問題の対応する解へ収束する事が証明された。但し，現時点では圧力項までは評価できていない。この結果については，数理解析研

究所講究録へ部分的に公表した。現在，査読付きの雑誌への投稿を準備しているところである。

更に各種の非有界領域での解析を行う為に，全空間での Stokes 方程式のリゾルヴェント問題について処罰法を適用した場合についての考察も行った。この際，初期値問題と同様に Helmholtz 射影を用いることで問題は非圧縮部分とそうでない部分の問題に分解される。いずれも Helmholtz 方程式と類似のものであるから，基本解は第 2 種変形 Bessel 関数によって表現される。この基本解を評価する事で，全空間でのリゾルヴェント問題についても処罰法の正当化を証明した。この成果についても論文を準備しているところである。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
Norikazu Yamaguchi: Mathematical justification of the penalty method for viscous incompressible fluid flows, 京都大学数理解析研究所講究録, **1830** , pp. 127-142, 2013. （査読なし）

〔学会発表〕（計 7 件）
Norikazu Yamaguchi: On some stability theorem of the MHD equations. Regularity Aspects of PDEs, Stefan Banach国際数学センター（ポーランド）, 2010 年 9 月.

Norikazu Yamaguchi: Remarks on the penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations. The 3rd China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 西北大学（西安・中国）, 2011 年 10 月.

Norikazu Yamaguchi: On a mathematical justification of the penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations, 4th Japanese-Germany Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2011 年 11 月.

Norikazu Yamaguchi: Mathematical justification of the penalty method for viscous incompressible fluid flow, 流体と気体の数学解析，京都大学数理解析研究所，2012 年 7 月

Norikazu Yamaguchi: A mathematical justification of the penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations, Prabolic and Navier-Stokes equations 2012, Stefan Banach国際数学センター（ベドレヴォ・ポーランド）, 2012 年 9 月

山口範和：Navier-Stokes方程式系に対する処罰法の半群理論による正当化について，神戸大学解析セミナー，神戸大学, 2013 年 2 月

Norikazu Yamaguchi: A mathematical justification of the penalty method for the Navier-Stokes equations, International Conference on the mathematical fluid dynamics, ホテル日航奈良, 2013 年 3 月

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山口範和（YAMAGUCHI, Norikazu）
富山大学・人間発達科学部・准教授
研究者番号：50409679