# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２７４００８６

研究課題名（和文）統計力学と量子論に動機を持つ数理物理学の確率解析的研究

研究課題名（英文）Stochastic Analytical Study for Mathematical Physics of Statistical Physics and Quantum Theory

研究代表者
乙部　厳己（OTOBE, Yoshiki）

信州大学・理学部・准教授

研究者番号：３０３３４８８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円、（間接経費）　930,000円

研究成果の概要（和文）：当研究で取り組んだ具体的な課題は次の2つである。1つには安定型白色雑音を伴う放物型確率偏微分方程式の解の正則性の問題、もう1つは確率線型輸送方程式の観測地から係数を推定する逆問題である。第一の問題については、（可積分性の低い）バナッハ空間の補間空間論を援用して正則性を議論する方針をとり、基準となる各空間での（非対称）独立確率変数の収束条件を得た。逆問題については2次変分過程を元としてランダムな観測地から決定論的係数を推定する公式を得ることにも成功した。

研究成果の概要（英文）：The aim of the present project was to consider temporal and statial regularities for stochastic partial differential equations of parabolic type driven by stable white noise, and to consider an inverse problem for stochastic linear transport equations. For the first problem, we made an approach by using a theory of complex interpolation spaces, and we discussed the convergence in a specific Banach space which has restricted integrability only. We succeeded in showing the convergence for non-symmetric independent random variables in the space which appears in constructing the solution. For the latter one, we got a nice formula to recover the deterministic coefficients from a random observation using the non-randomness of the quadratic variation process driven by a Gaussian white noise. Also we got several formulae for the problem both additive and multiplicative noise and both the noise was temporal and spatial.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率偏微分方程式　確率解析

## １．研究開始当初の背景

確率偏微分方程式の研究において、放物型の方程式で、雑音項がガウス型の白色雑音で与えられるものについては活発かつ深く研究されていた。一方でその解が半マルチンゲール（伊藤過程）とはならないことは常識ではあるものの、その理由は明確には分かっていない。例えば有限次元近似を行った方程式は、知られている限りどの近似法も半マルチンゲールの解を持つ。そして解はその極限としても得られるのであるが、半マルチンゲール性を失う。技術的にはガウス性と微分作用その不連続性との競合に対する解析学的帰結としてこれが得られるものの、その部分の解析は困難と考えられてきた。

また双曲型の方程式においては雑音影響が局所的にとどまるため、逆問題の定式化が自然な形でできるのではないかと考えられてきた。しかしながら確率偏微分方程式としての逆問題の定式化は未だなされていない状況であった。

## ２．研究の目的

(1)ガウス性と微分作用素との競合がいかにして発生するかを明確にするため、方程式としては同じ、あるいはきわめて類似の方程式を考える。そして雑音項としては、ガウス性を仮定せず、しかしある種の極限によってガウス性が回復できるような場合について考察することで、微分作用素と雑音の競合関係について深く理解しようというのが研究目的の一つである。

(2)確率偏微分方程式に対する逆問題が自然に定式化可能であることを示す。

## ３．研究の方法

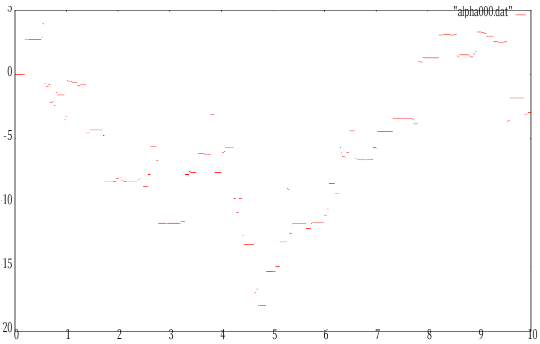
(1)まずガウス型時空間白色雑音に相当するものとして、白色安定雑音なるものを定義する。これは数年前に柱状安定過程として導入された概念を深化させて我々が定義した概念である。ただし、これは方程式が定義される空間そのものではなく、微分作用素に依存して定義される概念である。その雑音効果の下では従来から発展してきたガウス型の場合の基本的な手法は用いることができなくなるので、新たに補間空間論を援用した関数解析的手法によって、時間及び空間方向への解の正則性を詳細に議論する。この両者の正則性が安定雑音を定義する指数と共にどのように変化するかを解析し、それがガウス型への極限下においてどのような挙動を示すかを解析することで雑音項と微分作用素との関係を理解することが目的である。

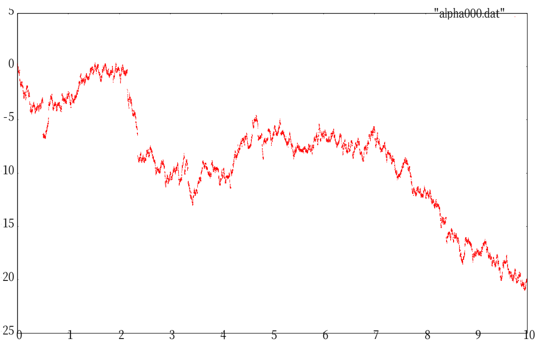
(2)確率偏微分方程式に対する逆問題を定式化するために、まず雑音効果が局所的にとどまる双曲型の方程式を考える。さらに解の具体的表示から手がかりを得るために、線型の輸送方程式に雑音効果が付加されたものを考える。確率微分方程式の理論においては確率空間をいつ設定するかは重要な問題であるが、ここでは輸送方程式に対して準問題が定式化され、その解を議論するときに確率空間が設定されるとする。その下で、各確率空間の元ごとに係数決定の逆問題を考える、すなわち、確率変数として逆問題の解を設定する。このとき重要となるのは、推定されるべき解が確率的であってはならないこと、すなわち確率変数としては定数関数が得られるべきであるということである。しかしながら当然ある種の確率効果が入ってくるので、我々の目的はあくまで推定したい量の決定、及びそれからの誤差の精密な評価を得ることを確率逆問題の設定とする。

## ４．研究成果

以上の研究対象に対して以下のような成果が得られた。なお、すべての研究成果は純数学的に記述されるべきものであるが、その状況はいずれも微妙かつ未知の事柄を含みうるので、計算機による数値実験も援用し、各段階における議論の指針とした。しかし、特に安定雑音の確率偏微分方程式に関しては数値計算法を位置から準備する必要があった。そこで、以下に挙げる図はいずれも当研究における成果の一つとして得られたものである。

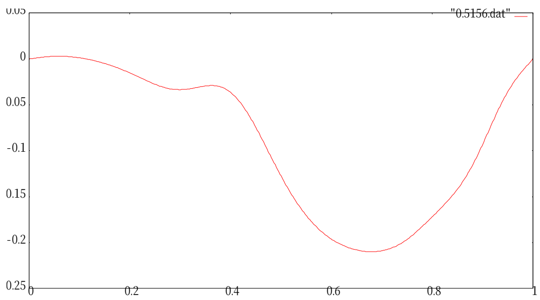
(1)安定型雑音を伴う確率偏微分方程式については、まず指数αの小さい場合と大きい場合について安定過程の見本路を示すと次のようになる。

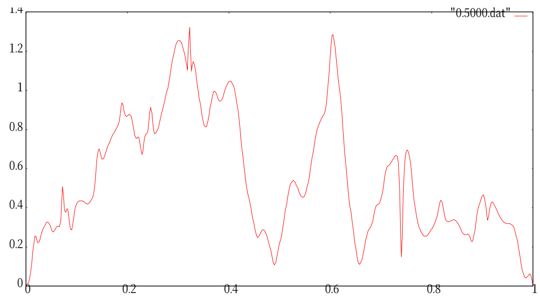


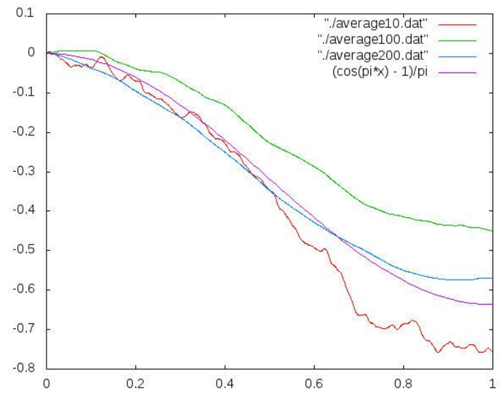

上図はα=0.1 のもの、下図はα=1.9 のものであるがいずれも純飛躍型確率過程、すなわち飛躍以外の理由によって値が変化しないような確率過程である。しかしながらα=1.9 のときには各瞬間において無数の飛躍があり、結果として見本路は右連続でかつ左極限を持つことが知られている。この見本路の図

の生成にはポアソン点過程を経由して直接的に相殺効果を取り出して値を計算する手法を開発した。安定型白色雑音は、微分作用素が対角化される基底の各元が係数としてこの確率過程を持つようなものとして定義される。その数値計算には（少なくとも図示する図のドット数程度の）莫大な数の基底を必要とするので、このような安定過程を長い時間、かつ多数に独立に生成する必要があり、そのためには当研究費で購入した高速計算機を多用した。
偏微分方程式の解の生成には陽的解法を用いた。途中陰的解法も実装したが、こちらはまだ信頼おける段階には至っていない。結果、下図のような解が得られた。



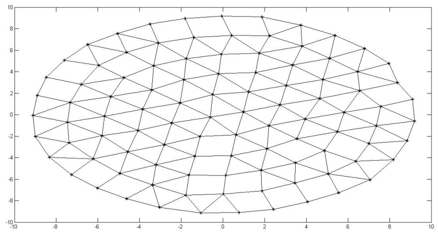




上図がα=0.9 のもの、下図がα=1.9 のものである。実際にはこれらの図は書く瞬間ごとに多数用意し、動画ファイルとして作成された。このように、（実際にはα=1 が境目であることが示されたが）安定過程の指数の差によって解の挙動が激変することが予想され、これは共同研究者らの先行研究で予想されていたものを否定する結果であった。
これらを踏まえて基底ごとに確率分布の変化の様子を解析し、その末尾確率の前金挙動と独立確率変数の和の理論とを拡張しながら、α>1 の場合にはまず満足の行く成果が得られた。それは、空間方向の正則性が指数の増大と共に減少するのに対し、時間方向への可積分性は増大するという予想外の成果であった。なお、正則性については連続性や滑らかさの詳細な評価を目指して現在もまだ研究遂行中であり、ここで述べた暫定的な成果も現時点では論文としては未発表である。α<1 の場合にも、上記に対応する結果と、解が空間方向へは本当に滑らかであるという成果が得られているものの、これは十分条件であり、精密な結果であるとは言いがたい。その理由はα<1 のときにはバナッハ空間の議論がうまく適用できず、基礎とする複素補間空間論がうまく働いていないことによる。この問題を解決するため、現在も無限次元空間上の独立確率変数列の和に対する条件の研究を続けている。
(2)確率輸送方程式としては、雑音項が時間的・空間的な 2 種類、また加法的・乗法的（線型）の 2 種類で合計 4 種類の方程式を考察した。なお、輸送方程式は 1 階の方程式であるため、時空間雑音は考察していない。なお長い間乗法的な場合については時間的なときには伊藤型として雑音項を考察していたが、議論を対称なものとするため、最近これをストラトノヴィッチ型に変更したが、数学的に本質的な差ではない。
確率的な観測データから決定論的な確率変数を得る典型的な手法は、大数の法則と、2 次変分過程の 2 種類が考えられる。当研究においてはまず処理が簡単な大数の法則に限定することとした。なお、雑音項が加法的な場合には 2 次変分過程は方程式の係数に関して何ら情報を保持していないことも示した。それぞれの場合について、係数を推定するための具体的な「公式」を示すことができた。ただしこの公式は観測時間無限大の極限として得られるもので、有限の観測においてはそれとの誤差評価も厳密に得られた。以下には我々の得た公式による推定と、（逆問題によらない）実際の係数とを比較した数値計算結果の図を示す。

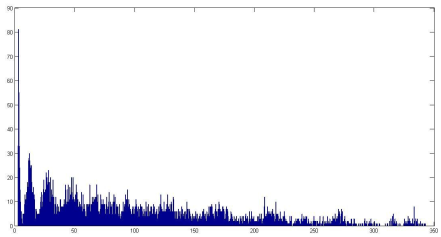



紫の曲線が実際の係数であり、観測を増やすごとに赤→緑→青とよく近似するようになる様子が示されている。
この成果は確率偏微分方程式に対する逆問題の初めての定式化とその数学的研究結果である。
なお、当研究期間中には間に合わなかったものの、その後の継続研究において、乗法的な場合に 2 次変分過程を利用して解を推定する方法がようやく見いだされたので、研究成果の発表論文はこの手法を取り入れて書き直されることとなる。
(3)上記の研究成果以外にも、いくつか部分的あるいは補助的な研究成果が得られたので、それを以下に示す。
①まず、九州大学の長田博文氏が活発に研究中の Ginibre 過程の研究に関し、その指数β

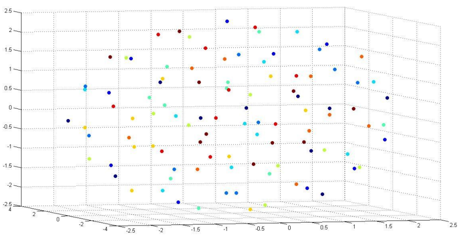
が無限大の極限においてこの点配置が最適充填を与えるかどうかという予想に関連して、ParisTech の Ben Said 氏と計算機を援用して数値計算を行った。2 次元のときにはそれは 3 角格子であるが、β=1000 のときには数のような配置が得られた。

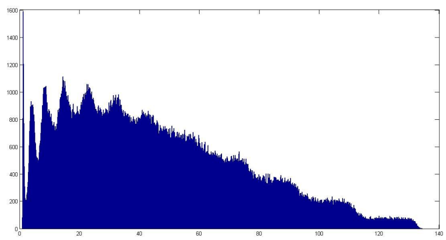


これの最適充填の適切性を調べるため、各格子間距離の分布を図示することにし、それは下図のようになった。

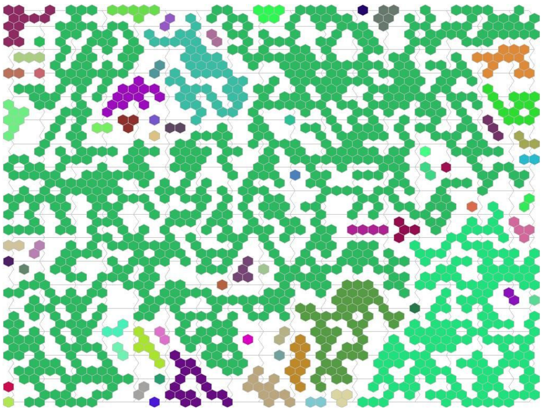


3 次元のときの対応する結果は下図のようになる。





これは 3 次元の最適充填問題に対して興味深い観点を与えることができるのではないかと期待している。
②2 次元の確率場、あるいは共形不変性に関して 3 角格子のパーコレーションは非常に重要な役割を果たしている。報告者は以前 2 次元でのパーコレーションを高速にかつ視覚的に効果的に表示するためのアルゴリズムを開発してそれをパーコレーション・シミュレータとして実装した。しかし、3 角格子など近年急激に発展する分野のシミュレーションには機能不足であった。そこで当研究の一環として 3 角格子、6 角格子などへ拡張すると共に、サイト・パーコレーションにおいては裏格子の描画にも対応するほか、シミュレーション機能を一新することにした。実際にはこの作業は単なる機能拡張ではなくほとんど一からアルゴリズムを実装し直す必要がある大がかりな作業となった。下の図はその一例である（3 角格子の臨界サイト・パーコレーション）。なお当研究成果のプログラムは Web 上にて一般に公開されている。



**５．主な発表論文等**
**（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）**

〔雑誌論文〕（計 2 件）
1. 乙部厳己, Inverse Problems for Stochastic Transport Equations, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1855, 2013, pp. 140-146
2. Y. Otobe and I. Sasaki, Measure theoretical approach to recurrent properties for quantum dynamics, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 44 (46), 2011, 465209 (11 pp), doi:10.1088/1751-8113/44/46/465209

〔学会発表〕（計 4 件）
1. 乙部厳己, 「確率偏微分方程式の定式化とその性質」, 愛媛大学解析セミナー, 2013 年 12 月 7 日, 愛媛大学
2. 乙部厳己、「Inverse Problems for Stochastic Transport Equations」、確率論シンポジウム、2012 年 12 月 20 日、京都大学
3. 乙部厳己、「Inverse Problems for Stochastic Transport Equations」、Workshop on PDEs with Random Terms、2012 年 6 月 19 日、湯沢グランドホテル
4. 乙部厳己、「関数解析的視点による確率（偏）微分方程式」、サマースクール『ゆらぎと微分方程式』、2012 年 6 月 16 日、東京大学

〔その他〕
1. 乙部厳己, 新入生のための数学書ガイド, 日本評論社, 数学セミナー , 2013 年(4

月号) 2013(Mar. 12)

ホームページ等

http://argent.shinshu-u.ac.jp

６．研究組織

(1)研究代表者

乙部　厳己（OTOBE, Yoshiki）
信州大学・理学部・准教授
研究者番号：30334882