様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　５日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：若手研究（B)
研究期間：２０１０～２０１２
課題番号：２２７４００８９
研究課題名（和文）　非線形双曲型および分散型方程式の高周波漸近解析

研究課題名（英文）High frequency asymptotic analysis for nonlinear PDEs of hyperbolic and dispersive type

研究代表者
砂川　秀明（SUNAGAWA　HIDEAKI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：８０３７５３９４

研究成果の概要（和文）：
高周波漸近解析の方法に基づいて双曲型および分散型の非線形偏微分方程式の解の諸性質を研究した。クライン・ゴルドン方程式の非線形連立系における共鳴相互作用と零構造の関係を明らかにした。非線形シュレディンガー方程式の小さな初期値に対する解の有限時間爆発の例を構成し、その解のライフスパンのオーダーの評価を与えた。また、零条件を満たさないあるクラスの非線形波動方程式への高周波漸近解析の方法の応用を試み、いくつかの成果を得た。

研究成果の概要（英文）：
Nonlinear partial differential equations of hyperbolic and dispersive type are studied from the view point of high frequency asymptotic analysis. Relations between the null structure and resonant interactions are revealed for systems of nonlinear Klein-Gordon equations. Examples on small data blow-up for nonlinear Schrodinger equations are constructed, and estimates for the order of the lifespan of the blowing-up solutions are provided. The method of high frequency asymptotics are also applied to a class of nonlinear wave equations not satisfying the null condition.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	700,000	210,000	910,000
２０１２年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：漸近解析、非線形波動

１．研究開始当初の背景
双曲型および分散型方程式は広義の波動現象に由来する偏微分方程式のクラスであり、その非線形相互作用下における解の振る舞

いを明らかにすることは、数学的な興味はもとより、応用上も大変重要であると広く認識されている。近年、解の存在・一意性・安定性と言ったいわゆる「適切性」の研究は目覚ましく進展しているが、その主要な手法は適当な関数空間の設定とその中での適当な評価式を導くことであり、解の形状そのものの性格に直に立ち入ることができるのは依然として相当限定されている。解についての具体的な知見を得たいのであれば、評価式を導くことよりも適当な近似解を見出して解の主要部を取り出す方が素直であろう。その様なアプローチの一つが、漸近解の方法である。線形の偏微分方程式に対しては重ね合わせの原理が成り立つので、この方法は大変うまくいく。特に、線形偏微分方程式に対する高周波漸近解析の研究を通して超局所解析やフーリエ積分作用素の理論が誕生し発達してきたことを思い出せば、それらの非線形版に相当する手法を整備して一つの理論に昇華させることは大変興味のある問題である。非線形偏微分方程式に対する高周波漸近解析の試みは過去にも多くの研究者によってなされてきたが、それでもなお、非線形性に起因する種々の困難を克服できたとは言い難い状況であり、一層の研究が待たれている。

２．研究の目的

上記のような状況を踏まえて、本研究では漸近解の考察を通して非線形偏微分方程式の解の形状についての詳細な知見を得るための方法を確立することを目標とした。特に、双曲型方程式の代表格である波動方程式、分散型方程式の代表格であるシュレディンガー方程式、および両者の中間に位置するクライン・ゴルドン方程式の３つを主な考察対象として、幾何光学近似や準古典近似に代表される高周波漸近解析の非線形版に相当する方法を整備・発展させるとともに、関連する諸問題に応用することを目指した。

３．研究の方法

以下の３つの項目に主眼を置いて研究を行った。

(1) 非線形クライン・ゴルドン方程式の連立系における共鳴相互作用と零構造の関係の解明。特に、非線形幾何光学近似に基づくアプローチ。

(2) 非線形シュレディンガー方程式の小さな初期値に対する解の有限時間爆発およびライフスパンの漸近評価について。特に、WKB 法の視点からの考察。

(3) 関連する諸問題への高周波漸近解析の応用。特に、零条件を満たさない非線形波動方程式の解の漸近挙動の解析への適用可能性の検討。

４．研究成果

本研究課題の成果は、(1) クライン・ゴルドン方程式に関するもの、(2) シュレディンガー方程式に関するもの、(3)波動方程式に関するもの、の３種類に分類される。以下それぞれについて記す。

(1)空間 2 次元において 2 次の非線形相互作用項を伴うクライン・ゴルドン方程式系に対する零条件の代数的な特徴づけを与え、零条件の下での解の時刻無限大における漸近自由性を証明した。この結果は 2004 年に J.-M.Delort のグループが得ていた結果の拡張であるとともに、証明自体も、より代数的な性格の強い見通しのよいものになっている(片山聡一郎氏・小澤徹氏との共同研究)。また、そこで用いられた代数的標準形変換という方法を、ディラック方程式とクライン・ゴルドン方程式の非線形連立系に適用し、解の長時間挙動に関して従来知られていた結果よりも詳細な漸近形を求めることに成功した(池田正弘氏・下村明洋氏との共同研究)。さらに、ニューヨーク大学の J.Shatah 教授のもとを訪問し、彼らのグループが最近提唱している時空共鳴法との関係についての研究討論を行った。彼らの方法と我々の方法との関係についての検討は、本研究課題終了後の現在も継続中である。

(2) 小さな初期値に対する非線形シュレディンガー方程式系の解の有限時間爆発の例を構成した。多くの先行研究では方程式に付随した保存則であるビリアル等式に基づいたアプローチが採られていたため、解の爆発が起こるためには初期値がある程度大きいことが必要であり、任意に小さい初期値に対する解の有限時間爆発を扱ったものは(背理法による非構成的な少数の結果を除くと)皆無であった。これに対して本研究では、特殊な状況下では初期値がどんなに小さくても有限時間内で解に特異性が発生することを単純なモデルを用いて示し、爆発のメカニズムが一種の共鳴現象に関係していることを明らかにした。さらに、解のライフスパンを初期振幅の大きさを用いて評価した(小澤徹氏との共同研究)。また、この問題に関連して、平成 24 年度後半より、ライフスパンが

無限大になる場合（つまり解が時間大域的に存在する場合）の非線形消散構造の特徴づけに関する研究を開始した。「『負の摩擦』が解を不安定化させる」という素朴な直観に従えば、非線形消散構造を調べることは解の爆発の研究と表裏一体をなすことが期待される。この問題に関しては、片山聡一郎氏・李春花氏と共同で部分的な結果を得ることに成功しており、今後も研究を継続していく予定である。

(3)空間 2 次元において 3 次の非線形項を伴う波動方程式の非線形消散構造について考察した。より具体的には、Christodoulou と Klainerman の意味での零条件が満たされない場合でも、非線形項の形状から決まるある関数が単位円周上で符号を保つならば解は時間大域的に存在すること、および、時間の増加ともに解のエネルギーが減衰することを証明し、さらにその減衰レートの評価を与えた。この結果は、上見練太郎氏が 1990 年代に提唱していた未解決問題の主要な部分を肯定的に解決したことに相当する。部分的な先行結果は久保英夫氏や星賀彰氏等に等によっても得られていたが、この論文の結果はそれらを全て含む最も一般的なものである(片山聡一郎氏・室谷大輔氏との共同研究)。また、空間 3 次元における零条件を満たさない波動方程式系に関して、これまでに知られていなかった種類の長距離型非線形効果が表れるような例について考察した。より具体的には、系の全エネルギーは保存されるが特定の成分のエネルギーだけは時間に関して減衰するといったものである。さらにこの例がより一般の非線形波動方程式系の枠組みの中において占める位置づけについて考察を進め、H. Lindblad と I.Rodonianski による弱零条件や、S.Alinhac 氏が提唱していた構造条件との関係を明らかにした。この成果は学術論文にまとめられ、現在、専門誌に投稿中である。（片山聡一郎氏・的場俊昭氏との共同研究）。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① Y. Kawahara and H. Sunagawa, Global small amplitude solutions for two dimensional nonlinear Klein-Gordon systems in the presence of mass resonance, Journal of Differential Equations, vol.251, (2011), p.2549-2567, 査読あり.

② S. Katayama, T. Ozawa and H. Sunagawa, A note on the null condition for quadratic nonlinear Klein-Gordon systems in two space dimensions, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol.65, (2012), p.1285-1302, 査読あり.

③ M. Ikeda, A. Shimomura and H.Sunagawa, A remark on the algebraic normal form method applied to the Dirac-Klein-Gordon system in two space dimensions, RIMS Kokyuroku Bessatsu, vol.B33, (2012), p.87-96, 査読あり.

④ S. Katayama,D. Murotani and H.Sunagawa, The energy decay and asymptotics for a class of semilinear wave equations in two space dimensions, Journal of Evolution Equations, vol.12, (2012), p.891-916, 査読あり.

⑤ T. Ozawa and H. Sunagawa, Small data blow-up for a system of nonlinear Schrodinger equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.399, (2013), p.147-155, 査読あり.

〔学会発表〕（計 6 件）

① H.Sunagawa, “Global small amplitude solutions for two-dimensional nonlinear Klein-Gordon systems in the presence of mass resonance,” Joint workshop on PDE at Jinhua, 2010/9/27, 浙江師範大学(中国).

② H.Sunagawa, “「On quadratic nonlinear Klein-Gordon systems in two space dimensions,” 調和解析と非線形偏微分方程式, 2011/7/4, 京都大学数理解析研究所.

③ H.Sunagawa, “On quadratic nonlinear Klein-Gordon systems in two space dimensions,” 4th MSJ-SI: Nonlinear dynamics in partial differential equations, 2011/9/18, 九州大学.

④ H.Sunagawa, “Small data blow-up for NLS systems,” China-Japan Joint Meeting on PDE at Yanji, 2012/9/10, 延辺大学(中国).

⑤ 砂川秀明, “Quadratic nonlinear Schrodinger systems in the presence of mass resonance,” 微分方程式の総合的研究, 2012/12/15, 京都大学.

⑥ 砂川秀明, “微分型非線形シュレディンガー方程式系の零構造について,” 第10回浜松編微分方程式研究集会, 2012/12/19, 静岡大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

砂川　秀明（SUNAGAWA　HIDEAKI）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：８０３７５３９４