様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　6 月　3 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2012
課題番号：22740092
研究課題名（和文）　非線形分散型方程式の解の挙動の研究

研究課題名（英文）　Study of behavior of solutions to nonlinear dispersive equations

研究代表者
赤堀　公史（AKAHORI　TAKAFUMI）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：90437187

研究成果の概要(和文)：　非線形分散型方程式の定常状態および､解の挙動について研究した。
特に、 エネルギー臨界項を含む非線形シュレディンガー方程式に対し、以下の結果を得た：
(1) 空間 4 次元以上ならば、 不安定な基底状態が存在する事を証明した。
(2) 空間 3 次元で、エネルギー劣臨界項の係数が小さい場合は，基底状態は存在しない事を証明した。
(3) 空間 5 次元以上の場合に、 基底状態より低いエネルギーの解の挙動を散乱・爆発の観点から分類した。

研究成果の概要（英文）： I have studied nonlinear dispersive equations. Especially, I studied nonlinear Schrodinger equations containing the energy-critical term, and proved the followings:
(1)　Existence of unstable ground state in four dimensions and higher.
(2)　Nonexistence of ground state in three dimension.
(3)　Classification of the behavior of solutions below the ground state energy, in view of scattering and blowup.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1100000	330000	1430000
2011 年度	900000	270000	1170000
2012 年度	1000000	300000	1300000
年度			
年度			
総　計	3000000	900000	3900000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式，非線形シュレディンガー方程式，
散乱問題，基底状態，爆発問題

１．研究開始当初の背景

非線形分散型方程式には、 非線形シュレディンガー方程式、KdV 方程式、ベンジャミン-オノ方程式など多くの方程式がある。 そのため、記述する現象も様々であり、物理や工学をはじめとする多くの分野で重要な役割を果たしている。

微分方程式によって記述される現象が、実際の現象と対応しているかを示すためには、数学的な検証が必要である。具体的には、実際の現象に対応する解の存在を示す必要がある。非線形分散型方程式においては、 分散性と非線形性の兼ね合いによって、爆発解、定在波(ソリトン)、 散乱解と呼ばれる３つの特徴的な解が存在し、これらの解の研究が重要である。 また、基底状態や励起状態と呼ばれる状態の安定・不安定性も重要である。

本研究では、これらの重要性を踏まえ、 爆発解、散乱解、及び基底状態の存在や安定・不安定性を研究する。上述のように、 非線形分散型方程式に分類される方程式は多く、方程式ごとに分散性や非線形性も異なるため、 非線形分散型方程式の代表例である非線形シュレディンガー方程式を中心に研究する。

２．研究の目的

次の二重冪型非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^{p-1}\psi+|\psi|^{q-1}\psi=0$$

および、より一般的な非線形性を持つ非線形シュレディンガー方程式に対し、 基底状態の存在や安定性、及び、解の挙動を散乱・爆発の観点から明らかにする。 ここで、 非線形項に現れる冪 p、q は

$$1+\frac{4}{d}<p<q\leq 1+\frac{4}{d-2}$$

を満たすとする。

(1) 上記の方程式に対し、定在波と呼ばれる次の形の解の存在を示す：

$$\psi(x,t)=e^{i\omega t}Q(x)$$

定在波の存在は、楕円型方程式

$$\omega Q-\Delta Q-|Q|^{p-1}Q-|Q|^{q-1}Q=0$$

の解の存在に帰着されるため、この方程式の解の存在を示す事が目標となる。 特に、作用積分を最小にする解は基底状態と呼ばれ、物理的な観点からも重要であるため、基底状態の存在・非存在を研究する。

(2) 基底状態が存在する場合に、基底状態より低いエネルギーの解の挙動を散乱・爆発の観点から分類する。 より詳しくは、 基底状態を利用して構成したポテンシャルの井戸から出発した解の挙動を散乱・爆発の観点から分類する事を目指す。この研究の帰結として、基底状態の不安定性に関する結果も得られる。

３．研究の方法

上記の非線形シュレディンガー方程式において、

$$q=1+\frac{4}{d-2}$$

の場合をエネルギー臨界、それより小さい場合をエネルギー劣臨界と呼ぶ。

エネルギー臨界の単独冪型非線形シュレディンガー方程式では、振動する定在波が存在しない事が知られているため、エネルギー劣臨界の場合とは状況が異なる事が予想できる。 そのため、エネルギー臨界と劣臨界の場合を分けて考察する。

エネルギー劣臨界の場合は、既に多くの研究結果があるため、上記の二重冪型非線形項だけでなく、単調性がない非線形項など、これまでの理論では扱えなかった非線形項について研究を行う。

エネルギー臨界の場合も劣臨界の場合も、まずは基底状態の変分法的な特徴付けを行い、その変分問題を解く事により基底状態の存在を示す。特に、作用の質量スケールから導かれる汎関数を利用した特徴付けを行う。

また、作用積分が基底状態の作用積分より小さい解に対し、その挙動を考える。このような解を考えると、基底状態の近傍を通る解を含むため、解の散乱および爆発の結果を得ると同時に、基底状態の安定・不安定性の結果を得る事ができる。また、基底状態の作用積分より小さな作用積分を持った定在波は存在しないため、解の挙動の分類が比較的単純である事が予想できる。

解の散乱を示すためには、ケーニックとメルルによって開発された、背理法と凝集コン

パクト性の議論を組み合わせた方法を応用する。一方、解の爆発の証明には、小川教授と堤教授によって開発された一般化ビリアル等式を用いた議論を応用する。

４．研究成果
２重冪型非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^{p-1}\psi+|\psi|^{q-1}\psi=0$$

を含むような広いクラスの方程式に対し、基底状態の存在を示した。 また、 基底状態より低いエネルギーの解の挙動を、爆発・散乱の観点から分類した。

(1) エネルギー劣臨界の場合
　非線形項に単調性のない方程式も扱えるように、これまでの解析手法を発展させた. 具体的には、次のような方程式も扱えるようにした：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi-|\psi|^{p-1}\psi+|\psi|^{q-1}\psi=0$$

① 上記の方程式を含むような広いクラスの非線形シュレディンガー方程式に対して、基底状態の存在および不安定性を明らかにした。

② ケーニック-メルルによって開発された方法を発展させる事により、基底状態より低いエネルギーを持つ解の挙動を散乱・爆発の観点から明らかにした。

(2) エネルギー臨界の場合
① 楕円型方程式

$$\omega Q-\Delta Q-|Q|^{p-1}Q-|Q|^{q-1}Q=0$$

に対し、空間３次元で周波数 ω が大きい場合には、基底状態が存在しない事を示した。
　一方、空間４次元以上の場合には、全ての周波数 ω に対して、上記の楕円型方程式は、基底状態を持つ事を示した。この方程式に対する基底状態の存在は既に知られていたが、非線形シュレディンガー方程式の解の挙動の解析も考慮に入れた変分法的な特徴付けを利用して存在を示した事がポイントである。

② 空間５次元以上の場合に、 基底状態を利用して構成したポテンシャルの井戸から出発した解の挙動を散乱・爆発の観点から明らかにした。 これにより、基底状態が、少なくとも、２種類の不安定性を持つ事も明らかになった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）
①赤堀公史, Slim Ibrahim, 菊池弘明, 名和範人, Existence of a ground state and scattering problem for a nonlinear Schrodinger equation with critical growth, Selecta Mathematica, 査読有, 19 巻, 2013, 545-609.

②赤堀公史, 菊池弘明, 名和範人, Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equations, Differential and Integral Equations, 査読有, 25巻, 2012, 1075-1118.

③赤堀公史, Slim Ibrahim, 菊池弘明, 名和範人, Existence of a ground state and blow-up problem for a nonlinear Schrodinger equation with critical growth, 査読有, 25巻, 2012, 383-402.

〔学会発表〕（計　４件）
①赤堀公史, Remarks on the energy-critical nonlinear Schrodinger equation, UVic one day seminar on Dispersive PDEs, Human and Social Development Building, University of Victoria, Canada, 2013年3月8日.

②赤堀公史, Remarks on the energy-critical nonlinear Schrodinger equation, 松山解析セミナー2013, 愛媛大学理学部, 2013年2月9日.

③赤堀公史, Scattering for nonlinear Schrodinger equations at critical regularity, 非線形分散型方程式における最近の進展, 京都大学数理解析研究所, 2012年5月21日.

④赤堀公史, Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equations, 非線形双曲型および分散型方程式の研究, 京都大学数理解析研究所, 2011年5月24日.

６．研究組織
(1)研究代表者
　赤堀公史（AKAHORI TAKAFUMI）
　研究者番号：90437187

(2)研究分担者
　　　なし
　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　なし
　研究者番号