

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740094

研究課題名（和文） 準古典超局所解析による変わり点の合流問題の研究

研究課題名（英文） Research on the problems of merging turning points via the semi-classical and microlocal analysis

研究代表者

渡部 拓也（WATANABE TAKUYA）

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：80458009

研究成果の概要（和文）：

小さなギャップをもつ2準位エネルギー間の遷移確率の断熱極限の問題において、擬交差により特徴づけられる「変わり点」及び「ストークス曲線」が遷移確率の漸近挙動にどのように影響するかを、完全 WKB 解析だけでなく準古典超局所解析を援用することにより、明らかにした。またその結果は、合流する個数や合流の自由度を拡張した今後の変わり点の合流問題及び高位の変わり点での接続問題への大きな足掛かりにすることができた。

研究成果の概要（英文）：

In the two-level adiabatic transition probability with a small gap, we show how "turning points" and "Stokes lines", which are characterized by the so-called avoided crossings, affect the asymptotic behavior of the transition probability. The results gave us a great benefit for the future problems which include many turning points of higher degree.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：基礎解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：完全 WKB 解析・準古典解析・超局所解析・遷移確率・変わり点

1. 研究開始当初の背景

本研究の問題の背景となるのは、シュレディンガー方程式の準古典解析である。これは、プランク定数を小さなパラメータ（以下、準古典パラメータ）とみて、方程式の解や微分作用素のスペクトルの準古典パラメータに関する漸近挙動を調べることである。準古典パラメータに関する極限が量子力学と古典力学を結びつけるものであることは、ボーアの対応原理として知られているが、解やスペ

クトルなど数学的にも重要な物理量の漸近挙動の主要項に、古典力学の幾何学的量を見出すことが、数学的な準古典解析の大きなテーマである。

準古典解析において非常に有効な手法として知られているのは、準古典パラメータに関して展開する WKB 解を用いる方法である。しかしながらこの級数解は一般に収束しない。これは WKB 解が変わり点に特異性を持つことに起因する。このため WKB 解は、不確定

特異点の理論と同様に、変わり点のまわりで解の漸近挙動が不連続的に変わるストークス現象を起こす。

上記のような難しさから、変わり点での WKB 解の接続問題は、準古典解析における大きなテーマであった。近年、Ecale-Voros, Gérard-Grigis, Aoki-Kawai-Takei-Koike らにより、上記の問題を数学的に厳密に扱うことのできる完全 WKB 解析の理論が盛んに研究されるようになった。

2. 研究の目的

完全 WKB 解析における大きな問題のひとつに変わり点の合流問題がある。変わり点が準古典パラメータとは別の対となるパラメータに依って合流する問題のは、2パラメータの問題としての難しさはもちろん、1位の変り点での解析が整備された完全 WKB 解析が適用できないという難しさがある。

実際に我々は、小さなギャップをもつ2準位エネルギー間の遷移確率を、時間依存シュレディンガー方程式のモデル方程式系を扱うことで、上記の問題設定を実現した。ここで準古典パラメータは、断熱パラメータであり、対となるパラメータは2準位エネルギー間のギャップである。

この研究の目的は、高位の変り点における WKB 解の接続問題を考察するための足掛かりを創造し、さらに変わり点の合流過程が遷移確率の前期挙動にどのように影響するかを解析することである。

3. 研究の方法

研究の方法は、完全 WKB 解析と準古典超局所解析のそれぞれの長所を活かし、併用することである。特に問題となる変わり点の近傍では、Helffer-Sjöstrand が単独の方程式に対しておこなった結果を連立系に拡張する。このアイデアは、フーリエ積分作用素を用いてもとの方程式と超局的に同値な標準形を導入し、WKB 解の代わりにその標準形の方程式の解を仲介させて、変わり点のまわりでの接続公式を導くものである。特に我々は、この解の接続に関して、相空間上の超局所特異台に着目し、WKB 解と超局所解を対応させ、WKB 解の漸近公式及びフーリエ積分作用素表示された超局所解の停留位相法による解析を行う。

この研究に関しては、パリ13大学の M. Zerzeri 氏と共同研究を行った。完全 WKB 解析に関しては渡部が知見を提供し、準古典超局所解析に関しては Zerzeri 氏が知見を提供するという研究体制を敷いて取り組んだ。

4. 研究成果

本研究課題において取り組んだ2準位間の遷移確率の断熱極限に関し、我々は変わり

点の合流を特徴づける2準位エネルギーの交差(実際には、交差における相互作用による擬交差)する点の「個数」「位数」に着目した。実際我々が行った2パラメータの問題においては、断熱パラメータとギャップパラメータの相互関係に応じて、遷移確率の主要項に寄与するものに大きな違いが現れた。

(1) 断熱パラメータがギャップパラメータより十分速く0に収束するとき

この場合は、完全 WKB 解析が上手く適用できる状況で、遷移確率は指数的に減衰し、そのオーダーには擬交差点の位数が大きく寄与することが明らかになった。

(2) ギャップパラメータが断熱パラメータより十分速く0に収束するとき

この場合は、完全 WKB 解析だけでは上手くいかず、準古典超局所解析を援用する必要があり、遷移確率は擬交差点の個数に大きく依存し、その誤差のオーダーは多項式程度であることが明らかになった。

この結果については、「Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I」において、報告した。また国内外を問わず、研究集会やシンポジウムにて研究発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① 著者名: T. Watanabe and J. Urabe
標 題: Characterization of PDE reducible to ODE under a certain homogeneity
雑誌名: Funkcialaj Ekvacioj
査読の有無: 有, 巻: 未定, 発行年: 2013
掲載予定, ページ: 未定, DOI: 未定
- ② 著者名: T. Watanabe and J. Urabe
標 題: Singularities of solutions of the Fuchsian Cauchy problem with ramified data
雑誌名: Journal of Mathematical Analysis and Applications
査読の有無: 有, 巻: 未定, 発行年: 2013
掲載予定, ページ: DOI: 未定
- ③ 著者名: T. Watanabe and M. Zerzeri
標 題: Transition probability for multiple avoided crossings with a small gap through an exact WKB method

and a microlocal approach
雑誌名: Comptes Rendus de l'Académie
des Sciences - Series I - Mathematics
査読の有無: 有
巻: 350 / 17-18, 発行年: 2012, ページ:
841--844,
DOI: 10.1016/j.crma.2012.10.005

- ④ 著者名: T. Watanabe
標題: Exact WKB approach to 2-level
adiabatic transition problems with a
small spectral gap
雑誌名: Tohoku Mathematical
Publications
査読の有無: 無
巻: 37, 発行年: 2012, ページ: 1-80,
[http://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/TMP
31to40.html](http://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/TMP31to40.html)
- ⑤ 著者名: T. Watanabe and J. Urabe
標題: A singular Cauchy problem for the
Euler-Poisson-Darboux equation
雑誌名: Journal de mathématiques pures
et appliquées
査読の有無: 有
巻: 93 / 3, 発行年: 2010, ページ:
223-239,
DOI: 10.1016/j.matpur.2009.11.008

[学会発表] (計 13 件)

- ① 発表者名: T. Watanabe
発表論題: Transition probability for
multiple avoided crossings with a
small gap through an exact WKB method
and a microlocal approach
学会等名: Séminaires de l'équipe de
Physique Mathématique et Equations
aux Dérivées Partielles
発表年月日: 2012 年 12 月 3 日
発表場所: パリ (フランス)
- ② 発表者名: 渡部拓也
発表論題: Asymptotic transition
probability for multiple avoided
crossings with a small gap
学会等名: 2012 夏の作用素論シンポジウ
ム
発表年月日: 2012 年 9 月 10 日
発表場所: 新潟大学 (新潟県)
- ③ 発表者名: 渡部拓也
発表論題: Microlocal approach to
two-level adiabatic transition
probability for multiple avoided
crossings with a small spectral gap
(Part I, Part II)
学会等名: RIMS 共同研究「逆問題への応
用を意図した解析学の研究」
発表年月日: 2012 年 7 月 26 日
発表場所: 京都数理解析研究所 (京都府)
- ④ 発表者名: T. Watanabe
発表論題: Microlocal approach to
two-level adiabatic transition
probability for several avoided
crossings with a small spectral gap
学会等名: Seminari di Fisica
Matematica, Università di Bologna
発表年月日: 2012 年 3 月 12 日
発表場所: ボローニャ (イタリア)
- ⑤ 発表者名: 渡部拓也
発表論題: Microlocal approach to
two-level adiabatic transition
probability for several avoided
crossings with a small spectral gap
学会等名: スペクトル散乱あきう (秋保)
シンポジウム
発表年月日: 2012 年 1 月 7 日
発表場所: ばんじ家 (宮城県)
- ⑥ 発表者名: 渡部拓也
発表論題: Microlocal approach to
two-level adiabatic transition
probability for several avoided
crossings with a small spectral gap
学会等名: 2011 年夏の作用素論シンポジ
ウム
発表年月日: 2011 年 9 月 5 日
発表場所: 熊本市国際交流会館 (熊本県)
- ⑦ 発表者名: T. Watanabe
発表論題: Adiabatic transition
probability for a small eigenvalue gap
from the viewpoint of the exact WKB
method
学会等名: Séminaire: Problèmes
Spectraux en Physique Mathématique à
l'Institut Henri Poincaré
発表年月日: 2011 年 3 月 7 日
発表場所: パリ (フランス)
- ⑧ 発表者名: T. Watanabe
発表論題: Connection problem between
exact WKB solutions to 2×2 system near simple turning points
学会等名: Seminari di Fisica
Matematica, Università di Bologna
発表年月日: 2011 年 2 月 28 日
発表場所: ボローニャ (イタリア)
- ⑨ 発表者名: 渡部拓也

発表論題：同次性に基づいて常微分作用素に帰着される偏微分作用素の特徴付け
学会等名：研究集会「若手による偏微分方程式における線形理論とその応用」
発表年月日：2011年1月13日
発表場所：同志社大学（京都府）

⑩ 発表者名：T. Watanabe
発表論題：Adiabatic transition probability for a small eigenvalue gap from the viewpoint of the exact WKB method
学会等名：“Problemes spectraux en physique mathématique” d’Orsay
発表年月日：2010年12月15日
発表場所：パリ（フランス）

⑪ 発表者名：渡部拓也
発表論題：ある同次性に基づいて常微分作用素に帰着される偏微分作用素の特徴付け
学会等名：「第17回超局所解析と古典解析」研究集会
発表年月日：2010年11月20日
発表場所：かんぼの宿 山代（石川県）

⑫ 発表者名：渡部拓也
発表論題：フックス型特異初期値問題の解の特異性
学会等名：日本数学会秋季総合分科会
発表年月日：2010年9月22日
発表場所：名古屋大学（愛知県）

⑬ 発表者名：渡部拓也
発表論題：フックス型特異初期値問題の解の特異性
学会等名：2010夏の作用素論シンポジウム
発表年月日：2010年9月6日
発表場所：松本市中央公民館（長野県）

〔その他〕

ホームページ等

主催した研究集会：

(1) 偏微分方程式姫路研究集会(2010年度, 2011年度, 2012年度)

<http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDE.html>

(2) 準古典解析入門講義(2010年度, 2012年度)

<http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/LSCA/LSCA2012.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡部 拓也 (WATANABE TAKUYA)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：80458009