

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 23 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740100

研究課題名(和文) 離散可積分系と可解力学系の幾何学的研究

研究課題名(英文) Studies on the geometry of discrete integrable systems and solvable chaotic systems

研究代表者

野邊 厚 (Nobe, Atsushi)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：80397728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：周期離散戸田格子の時間発展をそのスペクトル曲線(超楕円曲線)の対称積上の加法と見なすことにより、周期離散戸田格子の幾何学的実現を与える曲線族を任意の格子サイズに対して具体的に構成した。また、各曲線族は周期離散戸田格子の保存量を用いて表されることを示した。

周期離散戸田格子の超離散極限として得られる超離散周期戸田格子に対しても、トロピカル超楕円曲線を用いて同様の考察を行い、超離散周期戸田格子の幾何学的実現を与えるトロピカル曲線族を任意の格子サイズに対して具体的に構成し、各トロピカル曲線は超離散周期戸田格子の保存量を用いて表されることを示した。

研究成果の概要(英文)：We establish a geometric realization of the periodic discrete Toda lattice of an arbitrary system size by using the intersection of its spectral curve and other two curves. This realization is reduced from the addition of points on the symmetric product of the spectral curve, and the curves in the realization are concretely given by using the conserved quantities of the periodic discrete Toda lattice.

We also establish a geometric realization of the ultradiscrete periodic Toda lattice of an arbitrary system size, which is an ultradiscrete analogue of the periodic discrete Toda lattice, via tropical plane curves. The tropical curves in the realization, one of which is the spectral curve of the ultradiscrete periodic Toda lattice (a tropical hyperelliptic curve), are also given by using the conserved quantities of the ultradiscrete periodic Toda lattice.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：可積分系 トロピカル幾何学

1. 研究開始当初の背景

1989年, Quispel-Roberts-Thompson により発見された QRT 写像とは, 楕円曲線ペンシルのファイバー毎に定まる加法から導かれる写像力学系の総称である. これまでの研究により, QRT 写像は離散ソリトン方程式の簡約や離散 Painleve 方程式の自励極限を数多く含むことが知られていた. 一方, 楕円曲線における加法の代わりに倍角写像の定める力学系を考えると, それは一般解をもつカオス系(可解カオス写像)となる. このような可解カオス写像に対しても, QRT 写像と同様に有理楕円曲面のファイバー毎に定まる倍角写像と捉えれば, その幾何学的性質が明らかになる.

写像力学系に対しこのような幾何学的解釈が得られれば, 対応するトロピカル楕円曲面上の区分線形写像力学系を構成することが可能である. トロピカル楕円曲線ペンシルから QRT 写像や可解カオス写像に対応する区分線形力学系を導出し, それらの性質を詳しく調べる研究が進展しつつあった.

2. 研究の目的

1) 有理楕円曲面の底空間に作用する正多面体群を用いて, QRT 写像・可解カオス写像を高次の保存量をもつ2次元写像力学系に一般化する. QRT 写像は離散ソリトン方程式の簡約を多く含むことで知られるので, このように構成した2次元写像力学系と離散ソリトン方程式との関係を明らかにする.

2) このような2次元写像力学系に対して超離散化の手法を適用し, 2次元区分線形写像力学系を導出する. さらに, トロピカル楕円曲面を用いてその幾何学的背景を調べる. さらに, 箱玉系などの超離散可積分系とこのような低次元区分線形写像力学系との関係を明らかにする.

3) 有理楕円曲面の小平面型特異点および正多面体群の Klein 型特異点にそれぞれ附随するルート系の分類を用いて, 2次元写像力学系を分類し, これら二つのルート系の関係を明らかにする.

3. 研究の方法

初めに, 楕円曲線の標準形のひとつである Hesse の3次曲線のトロピカル化(トロピカル Hesse 曲線)における加法について詳しく調べた. トロピカル Hesse 曲線は, 区分線形な可解カオス写像のスペクトル曲線であり, その加法が可解カオス写像の時間発展を導くことが知られている. Hesse の3次曲線はレベル3テータ関数によって自然にパラメトライズされるため, その加法公式はレベル3テータ関数の満たす関数等式に他ならない. 一方, レベル3テータ関数のパラメータおよび独立変数を適切に制限することにより, その値域を実数に制限することができる. このような制限のもと, 超離散化の手法を適用し, 超離散化されたレベル3テータ関数の満たす

加法公式を導出した. このように正則関数の具体的な極限操作を計算することで, Hesse の3次曲線の Jacobi 多様体がトロピカル Hesse 曲線の Jacobi 多様体へ収束する様子を見ることができる. また, トロピカル Hesse 曲線ペンシルに作用する線形自己同型群についても具体的に構成することが可能になる.

当初の計画では, 正多面体群の作用と両立する QRT 写像や可解カオス写像を発見することを目指していたが, 上で述べたトロピカル Hesse 曲線の加法に関する研究が進展したため, そこで得られた知見を活かし, トロピカル超楕円曲線の加法およびそれに付随する区分線形写像力学系について詳しく調べる方向へ研究を進めることにした. なぜなら, 一般に, 離散ソリトン方程式などの可積分系は超楕円曲線とそのスペクトル曲線にもち, それらの時間発展は超楕円曲線の加法から導かれ, さらに離散ソリトン方程式の簡約として QRT 写像が得られるためである.

周期離散戸田格子(周期箱玉系)は, 超楕円曲線をスペクトル曲線にもつ離散可積分系のなかでもとくによく研究されていた. また, その超離散化である超離散周期戸田格子についても, トロピカル超楕円曲線の Jacobi 多様体における線形化の方法などが調べられていた. そこで, 超離散周期戸田格子のスペクトル曲線であるトロピカル超楕円曲線における加法公式を導出し, 他のトロピカル曲線との交叉を用いてその加法を幾何学的に実現する研究を行った. この際, まず周期離散戸田格子の幾何学的実現を構成し, 超離散化の手法をそれに適用することで, 超離散周期戸田格子の幾何学的実現を導出した. さらに, 超離散周期戸田格子の時間発展をトロピカル曲線どうしの交叉を用いて幾何学的に実現した.

4. 研究成果

1) レベル3テータ関数の満たす加法公式に超離散化の手法を適用し, トロピカル Hesse 曲線上の点の満たす加法公式を導出した. また, Hesse の3次曲線の Jacobi 多様体の部分多様体が, 超離散極限においてトロピカル Hesse 曲線の Jacobi 多様体に収束することを示した.

2) Hesse の3次曲線のペンシルに線形自己同型として作用する Hessian 群のトロピカル類似を構成した. すなわち, トロピカル Hesse 曲線のペンシルに作用する線形自己同型群が3次の二面体群であることを示した. この群は位数3の群(ペンシルの各曲線の3-torsion pointの群)と位数2の群(各曲線上の点の入れ替えとして実現される群)との半直積に分解されるため, ペンシルのパラメータを保存する. これは Hessian 群がペンシルのパラメータを保存しない事実と対照的である.

3) 解曲線が凹9角形でありかつ任意の初期

値に対して周期9をもつ2次元区分線形写像力学系 (Brown写像) のトロピカル幾何学的意味づけを行い, Brown写像は線対称な二つのトロピカル楕円曲線上の加法の合成であることを示した. この事実からBrown写像は対応するトロピカルJacobi多様体上で線形化されることがしたがう.

4) 種数2の超楕円曲線の倍角写像から, 適切な従属変数をとることにより, 有理写像で与えられる2次元複素力学系を構成した. これは楕円曲線の倍角写像から構成される可解カオス力学系の高種数への拡張と見なすことができる.

5) 超楕円曲線の加法を用いて周期離散戸田格子の時間発展を幾何学的に実現した. 周期離散戸田格子の時間発展は, そのスペクトル曲線である超楕円曲線のJacobi多様体における平行移動に他ならず, 超楕円曲線の対称積から因子類群への全射を通して, この対称積上に加法を定めることが可能である. この全射を通して周期離散戸田格子の時間発展を対称積上の加法と見なすことができる. さらに, 対称積の加法は超楕円曲線と他の2曲線との交叉を用いて幾何学的に実現できるため, これらの曲線の交叉が周期離散戸田格子の時間発展の幾何学的実現を与える. このような曲線族を任意の格子サイズに対して具体的に構成し, 各曲線は周期離散戸田格子の保存量を用いて表されることを示した.

6) トロピカル超楕円曲線の加法を用いて超離散周期戸田格子の時間発展を幾何学的に実現した. 周期離散戸田格子の超離散極限として得られる超離散周期戸田格子の時間発展は, トロピカル超楕円曲線のJacobi多様体上の平行移動である. また, この平行移動はトロピカル超楕円曲線の対称積における加法と見なすことが可能であり, さらに, この加法は, トロピカル超楕円曲線と他の二つのトロピカル曲線との交叉を用いて幾何学的に実現できる. 周期箱玉系の幾何学的実現を与えるトロピカル曲線族を任意の格子サイズに対して具体的に構成し, 各トロピカル曲線は周期箱玉系の保存量を用いて表されることを示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

- . Atsushi Nobe, "A geometric realization of the ultradiscrete periodic Toda lattice via tropical plane curves", RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, (2014), in press

- . 野邊厚, "超離散周期戸田格子の幾何学的実現", 応用力学研究所研究集会報告, 査読有, No. 25A0-S2 (2014) 114-120
- . Atsushi Nobe, "A geometric realization of the periodic discrete Toda lattice and its tropicalization", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, **46** (2013) 465203 (35pp)
- . 野邊厚, "超楕円曲線に付随する倍角写像力学系", 応用力学研究所研究集会報告, 査読有, No. 24A0-S3 (2013) 77-82
- . Atsushi Nobe, "Addition in Jacobians of tropical hyperelliptic curves", RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, **B30** (2012) 25-51
- . Atsushi Nobe, "Addition in Jacobians of hyperelliptic curves and the periodic discrete Toda lattice", 応用力学研究所研究集会報告, 査読有, No. 23A0-S7 (2012) 84-89
- . Atsushi Nobe, "An ultradiscrete integrable map arising from a pair of tropical elliptic pencils", Physics Letters A, 査読有, **375** (2011) pp. 4178-4182
- . Atsushi Nobe, "On the addition formula for the tropical Hesse pencil", 数理解析研究所講究録, 査読無, No.1765 (2011) 188-208
- . Atsushi Nobe, "A tropical analogue of the Hessian group", 応用力学研究所研究集会報告, 査読無, No.22A0-S8 (2011) 37-42

[学会発表](計18件)

- . 野邊厚, "N型離散戸田格子の幾何学的実現", 日本応用数理学会 研究部会連合発表会, 京都大学, 2014年3月20日
- . 野邊厚, "周期離散戸田格子の幾何学的実現とトロピカル化"(ポスター), 研究集会「非線形波動研究の拡がり」, 九州大学応用力学研究所, 2013年11月1日
- . 野邊厚, "セルオートマトンの幾何学 -- トロピカル超楕円曲線とソリトンセルオートマトン --", 数物コロキウム, 早稲田大学理工学術院, 2013年10月16日
- . 野邊厚, "周期箱玉系の幾何学的実現", 日本物理学会 2013年秋季大会, 徳島大学, 2013年9月26日
- . 野邊厚, "周期箱玉系の幾何学的実現", 日本数学会 2013年度秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013年9月24日
- . 野邊厚, "周期箱玉系の幾何学的実現", 日本応用数理学会 2013年度年会, アクロス福岡, 2013年9月9日
- . 野邊厚, "周期離散戸田格子の幾何学的

実現とそのトロピカル化」, RIMS 研究集会「非線形離散可積分系の新展開」, 京都大学数理解析研究所, 2013年9月3日

・ Atsushi Nobe, ``A geometric realization of the periodic discrete Toda lattice'', China-Japan Joint Work Shop on Integrable Systems 2013, Kyoto University, Kyoto, Japan 19 March 2013

・ 野邊厚, 「超楕円曲線に付随する可解カオス系」, 研究集会「非線形波動研究の最前線-構造と現象の多様性-」, 九州大学応用力学研究所 2012年11月3日

・ Atsushi Nobe, ``Integrable maps arising from the addition on tropical elliptic curves'', Mini-Workshop: Tropical geometry and ultradiscrete integrable systems, NEEDS 2012, Orthodox Academy of Crete, Kolymbari, Crete, Greece 10 July 2012

・ 野邊厚, 「離散周期戸田格子の幾何学的実現」, 日本応用数学会 研究部会連合発表会, 九州大学, 2012年3月9日

・ Atsushi Nobe, ``Tropical Jacobian of a hyperelliptic curve'', International Workshop on Tropical and Quantum Geometries, RIMS, Japan 14 February 2012

・ 野邊厚, 「超楕円曲線の加法と可積分系-差分および超離散-」, 研究集会「非線形波動研究の新たな展開」, 九州大学応用力学研究所, 2011年10月28日

・ 野邊厚, 「トロピカル超楕円曲線の Jacobi 多様体における加法」, RIMS 研究集会「可積分系数理の進化」, 京都大学数理解析研究所, 2011年8月17日

・ 野邊厚, 「トロピカル Hesse 曲線の加法公式について」, 日本数学会 2011年度年会, 早稲田大学, 2011年3月22日

・ 野邊厚, 「セルオートマトンとトロピカル幾何学」, 明治大学 第9回現象数理若手シンポジウム「セルオートマトンは現象数理の武器となりうるか?」, 明治大学, 2011年2月22日

・ 野邊厚, ``The group law on the tropical Hesse pencil'', 研究集会「非線形波動研究の新たな展開」, 九州大学応用力学研究所, 2010年10月28日

・ 野邊厚, 「トロピカル Hesse 曲線の加法公式について」, RIMS 研究集会「可積分系数理の多様性」, 京都大学数理解析研究所, 2010年8月20日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野邊 厚 (NOBE ATSUSHI)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号: 80397728

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: