

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740105

研究課題名(和文) 複素力学系のパラメータ空間の研究

研究課題名(英文) Research on parameter spaces in complex dynamics

研究代表者

稲生 啓行 (Inou, Hiroyuki)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：00362434

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：複素力学系に現れる複雑な現象を理解する上では、そこに現れる複雑な集合を計算機で描画し観察することは重要である。近年の計算機環境や仮想現実技術の発展によって、3次元仮想現実空間に没入して観察することができるようになった。それを用いて複素2次元(実4次元)空間の中の集合を観察することを可能にした。周期的な臨界点を持つ3次多項式のなす1-パラメータ族には、Mandelbrot集合などの同相なコピーが自然に埋め込まれていることを示した。反正則2次多項式族のMandelbrot集合の類似である tricorn では、Mandelbrot集合の持つような自己相似性が成り立たないことを示した。

研究成果の概要(英文)：Computer pictures has been playing an important role in studying complicated phenomena in complex dynamics. Recent development in computer environment and virtual reality technology enabled us to immerse into 3D virtual reality space. We visualize objects in complex 2D (real 4D) space with help of such a technology. We proved that homeomorphic copies of Mandelbrot set and so on are naturally embedded into 1-parameter spaces of cubic polynomials with a periodic critical points. We proved that the tricorn, an analogue of the Mandelbrot set in the anti-holomorphic quadratic family does not have the self-similar property which the Mandelbrot set has.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：複素力学系 Mandelbrot集合

1. 研究開始当初の背景

- (1) 1 変数複素力学系において相空間やパラメータ空間の可視化は重要な役割を果たしてきた。しかしながら、2-パラメータ族ですら複素2次元(実4次元)であり、可視化することは非常に困難である。その為、このような高次元のパラメータ空間の構造についてはわずかな知見しか得られていなかった。
- (2) 一方で反正則2次多項式族や実3次多項式族などの実2-パラメータ族を考慮することで、可視化することができ、かつ複素1-パラメータ族では見られない高次元特有と考えられる現象も観察されていた。実際に非同所連結性や非弧状連結性などが数値的に観察され、一部は証明されていた。

2. 研究の目的

複素力学系の高次元パラメータ空間を数値的・数学的により深く理解する為に、以下の

- (1) 複素2次元空間内の(フラクタル)集合の、特に1変数複素力学系のパラメータ空間の分岐集合や分岐測度の可視化の方法を開発する。
- (2) 高次元のパラメータ空間の中の複素1-パラメータ族について、Mandelbrot集合などのよく知られたパラメータ空間の性質がどの程度成り立つかを、組み合わせ的性質の複雑さを理解することと既存の方法を適用することで示す。
- (3) 実2-パラメータ族の性質を深く調べることで、1-パラメータ族では起きない現象を数学的に厳密に示し、そのことによって、その族が自然に埋めこまれている複素高次元パラメータ空間の性質を調べる。

3. 研究の方法

- (1) Favre-Dujardinの結果を利用して多項式のパラメータ空間上の分岐測度を近似計算した。また、宇敷重廣氏の開発したソフトウェア(StereoViewer, HenonExplorerなど)や、ヘッドトラッキング(頭の向きを検知する)機能を有したヘッドマウントディスプレイを利用してそれらの複素2次元空間内の数学的対象を可視化できるようにした。
- (2) 主に複素2次元のパラメータ空間内の、複素1-パラメータ部分族や、実2-パラメータ部分族について、既によく知られているMandelbrot集合と類似した性質、本質的に異なる性質について数値計算を用いながら数学的に厳密に研究した。特にMandelbrot集合の自己相似性の一般化は、Kiwi氏と共同で定式化した「矯正写像」が同相写像になるかどうか、という問題に帰着されている為、矯正写像が全単射になるか、連続になるか、また良い連続拡張が存在するか、といったことを研究することで調べることができ

るため、これらの性質を具体的な族・部分族について調べた。

4. 研究成果

- (1) 3次多項式族(複素2次元)の分岐測度を近似的に計算する方法を開発し、実際にそれを可視化することに成功した。残念ながら、まだ非常に複雑な構造を観察するのに十分な解像度が得られていないが、2次元以上のパラメータ空間全体を可視化するというのは初めての試みであり、それが可能であることを示したという点だけでも画期的である。今後計算速度の向上や表示する為のソフトウェア、ハードウェアの発展によって少しずつ精度が向上し、より良いアルゴリズムの開発も進むことが期待される。可視化に関しては当初は宇敷重廣氏によるStereoViewer, HenonExplorerを用いていた。仮想現実空間の中に入って(没入して)観察する為には今までCAVEなどの大がかりな装置が必要であり、一般の人が見ることは非常に困難であった。しかし、ヘッドトラッキング機能を搭載したヘッドマウントディスプレイの登場によって、安価な環境で、仮想現実空間に没入して観察することが可能になった。これによってより立体的に構造を把握することが可能となり、より実体感を持って対象を観察できるようになった。このような手法は本研究だけでなく、数学や他分野における様々な3次元・4次元の対象を可視化することに使えるものであり、研究はもちろん、教育に於いても様々な利用方法が考えられる。今後このような安価で容易な可視化装置が普及し、多くの人が開発・利用していくことで、数学の研究や教育に大きく貢献することが期待できる。

- (2) 周期的な臨界点を持つ3次多項式のなす1-パラメータ族(図1)について、稲生とKiwiによって定式化した「矯正写像」およびその連続拡張について調べ、Mandelbrot集合の自己相似性の拡張として、Mandelbrot集合などの同相なコピーが自然に埋めこまれていることを示した(Kiwi, Roesch両氏と共同、執筆中)。Mandelbrot集合は2次多項式族のconnectedness locusと呼ばれるものであり、3次多項式においては単に自己相似ではなく、矯正写像の組み合わせ的性質に応じていくつかの族のconnectedness locusのコピーが現れる。この場合ではMandelbrot集合の他に、不動

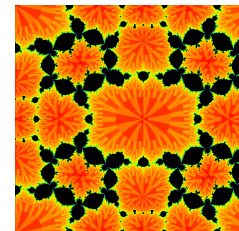


図1: 周期3の場合

点を持つ3次多項式族,不動点を持つ双2次多項式族,および閉単位円板(2乗写像のJulia集合)が現れるだけでなく,矯正写像が定義できない(連続拡張しなければならない)点が1点とは限らず,またその点を除くと不連結になることもあるなど, Mandelbrot 集合の場合より難しくなっているが,組み合わせをより丁寧に見ることで解決した. また Mandelbrot 集合は外射線を用いて綺麗に分割され,コピーたちは互いに交わらないか一方が他方に含まれるかのどちらかであるが,この場合は一部分だけで交わることもあるなど,より複雑な構造をしているが,逆にその交わり方によって構造の一部分を記述することができる.

(3) 上の族に対して,2次多項式の充填Julia集合を「切り開いた」ものが族に自然に埋め込まれている,というMilnorの予想に対しても「Douadyのウサギ」の例に関しては証明の具体的な方針は完成しており,それに沿って証明ができると考えている.このことがより一般にわかると,更に多くの構造を記述することができるようになる.

(4) 反正則2次多項式族のMandelbrot集合の類似である tricorn と呼ばれる集合

(図2)は,弧状連結でないことが知られている.その現象が実際に特定の場所で起きていることを,精度保証付き数値計算を用いて厳密に示した.このことは,



図2: tricorn

この現象が起きている場所を含む「小tricorn」(のように見える集合)が実際には tricorn 自身とは同相にならないことを意味しており,従って, tricorn では Mandelbrot 集合と同様の自己相似性は成り立たないことがわかる.同様に実三次多項式族にも tricorn に似た集合が数値的に観察されているが,そのうちの1つについても,同様に tricorn と同相にならないことが示せた. また tricorn の補集合には自然な(実解析的な)極座標が入っている. Mukherjee 氏と共同で,その極座標によって定まる外射線が,周期3以上の奇数周期の双曲成分に集積する場合に振動して1点に収束しないことを示した.

反正則力学系の2回合成は正則力学系であり,その意味で反正則力学系族はある正則(複素)力学系族の部分族であると考えられる.従ってこれらの結果は複素力学系のパラメータ空間の性質であり,例えば,自己相似性が成り

立たないことは,稲生による既知の結果である「矯正写像が一般に連続ではない」という結果に対する具体的な例を与えている.既知の結果では,構成的に示してはいるが,背理法を用いている為に正確にどの点で連続でないかは記述できていなかったが,この場合では連続にならない点があるかが正確に記述できるのである.

(5) 1変数複素力学系においては,複雑な現象の多くは放物型周期点の分岐と関連付けて研究されている.放物型周期点に分岐したときに放物鉢から長時間かけて外に出ていく軌道が現れることがある.そのような軌道を表すのに Lavours 写像が用いられる.この類似を,2次元の歪積の力学系が2つのサドルを結ぶ軌道を持つ場合に構成した. Lavours 写像は Julia 集合のパラメータ不連続性を示すのに用いられたが,それと同様,この写像を用いて,歪積のファイバー Julia 集合の不連続性を正確に記述することができる.このような現象は歪積に限らず一般的にサドルを結ぶ軌道があれば起きていると考えられ,それによって2次元複素力学系の複雑な現象が,今まで以上に詳しく記述できるのではないかと考えている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者,研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Hiroyuki Inou, Extending local analytic conjugacies, Transactions of the American Mathematical Society, 363 (2011) 331-343, 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05049-4>

稲生 啓行, Extending local holomorphic conjugacies, 数理解析研究所講究録 1699「複素力学系とその関連分野の総合的研究」(2010) 62-67, 査読無.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1699.html>

稲生 啓行, Holomorphic index and domains and ranges of parabolic renormalizations 数理解析研究所講究録 1762「複素力学系とその周辺分野の研究」(2011), 39-45, 査読無.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1762.html>

Hiroyuki Inou, Combinatorics and topology of straightening maps I: Compactness and bijectivity,

Advances in Mathematics 231 (2012),
2666-2733, 査読有 .
DOI: 10.1016/j.aim.2012.07.014

〔学会発表〕(計 9 件)

Hiroyuki Inou, Straightening maps,
Bicentennial Workshop on Dynamical
Systems, 2010 年 6 月 1 日, チリ, 北カ
トリック大学考古学博物館 .

Hiroyuki Inou, Parameter spaces in
complex dynamics, Doctorial Forum of
Mathematics between Fudan and Kyoto
Universities, 2011 年 11 月 4 日, Fudan
University.

稲生 啓行, “Cut-open” rabbit in
parameter spaces, 複素力学系の総合
的研究, 2012 年 1 月 26 日, 京都大学数
理解析研究所 .

Hiroyuki Inou, On domains and ranges
of near-parabolic renormalizations,
Workshop on Non-uniformly Hyperbolic
and Neutral One-dimensional Dynamics,
2012 年 4 月 24 日, National University
of Singapore.

稲生 啓行, 複素力学系のパラメータ空
間における相似性について, 東北大学大
学院理学研究科数学専攻談話会, 2012
年 4 月 16 日, 東北大学大学院理学研究
科 .

稲生 啓行, Are baby tricorn
homeomorphic to the tricorn?, 複素力
学系の新展開, 2012 年 12 月 12 日, 京
都大学数理解析研究所 .

稲生 啓行, Tricorn の(非)自己相似性
について, 2012 年度冬の力学系研究集
会, 2013 年 1 月 12 日, 日本大学軽井沢
研修所 .

Hiroyuki Inou, On self-similarity of
the tricorn, Mathematics Colloquium,
2013 年 2 月 18 日, Jacobs University
Bremen.

Hiroyuki Inou, A baby tricorn is not
homeomorphic to the tricorn, 第 21
回有限無限次元複素解析国際会議, 2013
年 6 月 16 日, 南京大学 .

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~inou/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

稲生 啓行 (INOUE, Hiroyuki)

京都大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号 : 00362434