

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740107

研究課題名(和文)可積分系とミドルコンボリューション

研究課題名(英文)Integrable system and middle convolution

研究代表者

竹村 剛一 (Takemura, Kouichi)

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：10326069

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円、(間接経費) 870,000円

研究成果の概要(和文)：ホインの微分方程式の特別な場合として、特異点の一つがみかけの特異点となるときにミドルコンボリューションを施すと多項式的な解をもつ場合に対応することがわかり、この場合において解の積分表示を得ることができた。そして、一般超幾何微分方程式との関連についても研究をすすめた。他に、多添字直交多項式についてや超離散パンルヴェ方程式について成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We investigated Heun's differential equation in the case that one of the singularity is apparent. By applying middle convolution for it, we obtain an equation which admits a polynomial-type solution, and we have integral representations of solutions of the original differential equation. We also studied it with a connection to generalized hypergeometric equations. We obtained results on multi-indexed orthogonal polynomials and on ultradiscrete Painleve equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系 数理物理 複素領域の微分方程式 ホインの微分方程式 パンルヴェ方程式 ミドルコンボリューション

1. 研究開始当初の背景

ガウスの超幾何微分方程式やその合流型微分方程式は量子力学での水素原子の模型など物理の模型において非常に重要な関数であるが、数学的にはガウスの超幾何微分方程式は複素平面に無限遠点を付加したリーマン球面上で3点に確定特異点をもつ2階の線型微分方程式の標準型である。

確定特異点を4つに増やした2階の線型微分方程式の標準型はホインの微分方程式と呼ばれるものであり、物理の模型においてもたびたび登場するが、ガウスの超幾何微分方程式と違ってリジッド(局所構造が全体を決定する)ではなく、解の解析もはるかに難しくなる。

ところで、ミドルコンボリューションはKatzによって1996年に出版された著書「Rigid local systems」で定式化されているが、道具立てが重厚であり内容は難解である。後にDettweilerとReiterはKatzのミドルコンボリューションをより平易な道具立て、つまりフックス型微分方程式系とそのモノドロミーを用いて再定式化した。ここでのミドルコンボリューションは、微分方程式の解をオイラー変換によって移すことで引き起こされる微分方程式自体やモノドロミーの変換である。また、additionとは微分方程式の解にベキ乗を掛けることで引き起こされる変換である。フックス型微分方程式に対して rigidity index という数に対応させることができるが、これはアクセサリーパラメーターという特性指数からは決定されないパラメーターの個数と関係する量である。

微分方程式系に対して addition とミドルコンボリューションを逐次適用することで簡素化できたなら、簡素化した微分方程式の解とその性質から、もとの微分方程式の解やその性質を調べられる。ここで、addition とミドルコンボリューションで rigidity index が不変であることが知られている。

Rigidity index が2、つまりアクセサリーパラメーターをもたない場合であって既約なフックス型微分方程式は、addition とミドルコンボリューションを逐次適用することで一階の微分方程式に帰着できることが本質的にKatzによって示されている。一階の微分方程式から逆操作の addition とミドルコンボリューションを用いることで、rigidity index が2で既約なフックス型微分方程式の解は積分表示(オイラー変換の合成によるもの)をもつことがわかり、モノドロミーの計算の足掛かりとなる。

Rigidity index が0で既約なフックス型微分方程式については、addition とミドルコンボリューションを逐次適用することで行き着く

微分方程式には4つの系列があり、 $D_4^{(1)}$ 、 $E_6^{(1)}$ 、 $E_7^{(1)}$ 、 $E_8^{(1)}$ 型のDynkin図形に対応することが、Kostov, Crawley-Boevey, 大島利雄らの研究により解明された。

ここで $D_4^{(1)}$ に対応する微分方程式は、サイズが2で4点確定特異点をもつフックス型微分方程式系である。これはアクセサリーパラメーターをもち、モノドロミー保存変形によりアクセサリーパラメーターが満たすべき式として第六パンルベ方程式が得られる。

また、 $D_4^{(1)}$ 型で留まるミドルコンボリューションに対応する第六パンルベ方程式での岡本 - Backlund 変換や積分変換の具体形がFilipuk や本研究代表者によって得られている。アクセサリーパラメーターを特殊化することにより、ホインの微分方程式での積分変換が得られることもわかっている。

2. 研究の目的

ミドルコンボリューションや rigidity index をおもに用いて、ホインの微分方程式とその合流型、パンルベ方程式とその拡張など、可積分系と関連する方程式を研究していく。このために、不確定特異点を含む線形常微分方程式に対してのミドルコンボリューションの理論を具体的に構築していく必要がある。

また、すでに得られている解から、ミドルコンボリューションなどを用いて新たな解やその性質を得ていき、可積分系の世界を広げていく。

また、ホインの微分方程式には楕円関数を用いた表示があり、これはBCn型Inozemtsev系というn変数の量子可積分系において1変数の場合に対応している。Inozemtsev系や関連する模型についても解明をすすめる。

3. 研究の方法

ホインの微分方程式やそれに関連する微分方程式などに対し、フックス型微分方程式系に対するミドルコンボリューションなどを用いて未知の解を求め、モノドロミーなどの性質を探る。

直交多項式の側面からもアクセサリーパラメーターを含む微分方程式を調べていく。不確定特異点を含む線形常微分方程式に対してのミドルコンボリューションの理論を、とるべき商空間の具体形やその性質、rigidity index の望ましい定義、不確定特異点を含む微分方程式に対してのリーマン・ヒルベルト問題に注意しながら構成する。そして、合流型ホインの微分方程式を含むさまざまな微分方程式の解の性質や特殊解の具体形を研究する。

4. 研究成果

研究代表者は、まずホインの微分方程式ではミドルコンボリューションによって解の性質がどのように変化するかを研究した。

線形微分方程式の確定特異点がみかけの特異点であるとは、その特異点の近傍での解はすべて正則か高々極をもつ(非整数冪や対数項が出てこない)ことである。報告者は、ホインの微分方程式で特異点の一つがみかけの特異点であるものをミドルコンボリューションによって変換すると、多項式かこれと類する(多項式的な)関数を解にもつホインの微分方程式に移ることを発見し、それを示した。そして、特異点の一つがみかけの特異点であるホインの微分方程式に対して、対応する多項式的な解を用いた積分表示を導出した。また、第六パルベ方程式をモノドロミー保存変形で生み出す2階線形常微分方程式に対しても同様の結果を得た。

ところで、ガウスの超幾何微分方程式の一般化として、一つは特異点の数を4つに増やしたホインの微分方程式が考えられ、他には微分の階数を上げた一般超幾何微分方程式が考えられる。ホインの微分方程式はリジッドでないが階数は2であり、一般超幾何微分方程式はリジッドであるが高階である。

ホインの微分方程式において、前述した場合である一つがみかけの特異点である状況を考えて、一般超幾何微分方程式の特別な可約な場合において因子分解したときの右因子としてこのホイン型の微分作用素が現れることがいくつかの場合に観察された。この観察を予想として定式化し、いくつかの場合にはこの予想が正しいことを示した。また、例外ヤコビ多項式と呼ばれる直交多項式系に対してホインの微分方程式の研究を応用し、これと一般超幾何関数との関係を明示した。

ところで、ガウスの超幾何微分方程式は Poschl-Teller ポテンシャルをもつ量子力学系にも現れ、この模型の固有関数としてヤコビ多項式という直交多項式が現れる。合流型超幾何微分方程式においてはラゲール多項式が対応する。

これらに、Darboux-Crum 変換をうまく適用することによって新たな量子系を得ることができ、その固有関数の主要部として多添字ヤコビ多項式や多添字ラゲール多項式が得られる。これらには、見かけの特異点が付加されている。また、例外ヤコビ多項式は多添字ヤコビ多項式の特別な場合となっている。佐々木隆氏および Ho Choon-Lin 氏と共同で、これらの見かけの特異点の合流について研究を行った。

とくに、合流が起こるときのパターンを調べ、具体例をいくつも計算した。それらの例のうちで、ホインの微分方程式の解となるものを得ることができた。

不確定特異点を含む場合のミドルコンボリューションについても研究をすすめた。不確定特異点を含む場合のミドルコンボリューションの定義を与え、いくつかの基本的性質を導き、例として合流型超幾何関数の場合でうまくいっていることを確かめた。利点として、比較的計算がしやすいということがある。とくにオイラー変換と直接関連する部分については、ポーランドの Banach center 刊行の雑誌に発表した。

ストックホルムの Edwin Langmann 氏との共同研究において、BCn 型 Inozemtsev 系での核関数とこれに関する積分変換について、更なる一般化を含めて結果を得た。1変数であって周期についての微分項がない場合はミドルコンボリューションに対応している。

また、当初の予定では具体的に考えていなかったこととして、超離散パルベ方程式についても結果を得ることができた。

パルベ方程式は2階の非線形常微分方程式であるが、動く特異点は極しかもたないという性質で特徴付けられており、一型から六型まで名前がついている。一方、パルベ方程式の差分方程式版(離散版)も考えられており、対称性を中心として研究されている。さらに、差分パルベ方程式から超離散化を考えることができ、超離散方程式はセルラオートマトンとみなすことができる。研究代表者は筒井氏とともに差分パルベ第六方程式の符号付き超離散化を行い、超幾何型の解(リッカチ解)との関連を研究してきた。そして一般的な解の漸近挙動についての予想を立て、いくつかの場合に数値的にその予想が妥当なことを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Kouichi TAKEMURA, Terumitsu Tsutsui: Ultradiscrete Painlevé VI with Parity Variables, SIGMA 9 (070) (2013), 査読有 DOI:10.3842/SIGMA.2013.070

C.-L. Ho, Ryu Sasaki, Kouichi TAKEMURA: Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: the Jacobi case, J. Phys. A 46 115205 (2013), 査読有 DOI:10.1088/1751-8113/46/11/115205

Kouichi TAKEMURA: Euler's integral transformation for systems of linear differential equations with irregular singularities, Banach Center Publ. 97 141-152 (2012), 査読有 DOI:10.4064/bc97-0-10

Ryu Sasaki, Kouichi TAKEMURA: Global Solutions of Certain Second-Order Differential Equations with a High Degree of Apparent Singularity SIGMA 8 (085) (2012), 査読有 DOI:10.3842/SIGMA.2012.085

Edwin Langmann, Kouichi TAKEMURA: Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems, J. Math. Phys. 53 082105 (2012), 査読有 DOI: 10.1063/1.4745001

Kouichi TAKEMURA: Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial, J. Phys. A 45 085211 (2012), 査読有 DOI:10.1088/1751-8113/45/8/085211

Kouichi TAKEMURA: Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities, New Trends in Quantum Integrable Systems, 393-420 (2010), 査読有 DOI:10.1142/9789814324373_0020

〔学会発表〕(計 5 件)

竹村 剛一, 筒井 栄光: Ultradiscrete Painlevé VI with Parity Variables, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション 2013 年 9 月 24 日 愛媛大学

C.-L. Ho, 佐々木 隆, 竹村 剛一: Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: the Jacobi case, 日本数学会 2013 年度年会無限可積分系セッション 2013 年 3 月 23 日 京都大学

佐々木 隆, 竹村 剛一: Global solutions of certain second order differential equations with a high degree of apparent singularity, 日本数学会 2013 年度年会函数方程式論分科会 2013 年 3 月 20 日 京都大学

Edwin Langmann, 竹村 剛一: Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション 2012 年 9 月 18 日 九州大学

竹村 剛一: Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション 2011 年 9 月 30 日 信州大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹村 剛一 (TAKEMURA KOUICHI)
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10326069

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし