

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740111

研究課題名(和文)トロピカル幾何、非可換幾何と可積分系

研究課題名(英文)Tropical geometry, non-commutative geometry and integrable systems

研究代表者

山崎 玲(井上玲)(Inoue Yamazaki, Rei)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30431901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：箱玉系に関するこれまでの結果をまとめ、周期箱玉系の一般等位集合を与える高次元実トーラスはトロピカル曲線のトロピカルヤコビ多様体であることを証明した。これは量子群とトロピカル幾何の関係の現れである。また、クラスター代数の応用について次の成果を得た：クラスター代数のポアソン構造で先行する結果を自然に含むものを構成し、さらにそれを差分Lotka-Volterra方程式に応用した。点付き曲面の三角形分割とクラスター代数との関係をもとに、1点穴あきトーラス束と2橋結び目の複素体積を求めた。さらに組みひも群をクラスター代数の言葉を用いて実現し、結び目の複素体積に関する予想を定式化した。

研究成果の概要(英文)：We solved a problem on the box-ball system: the general isolevel set of the box-ball system is isomorphic to the Jacobian variety of a tropical curve, which links quantum group with tropical geometry. We also studied applications of cluster algebra: we constructed the Poisson structure of cluster algebra which includes preceding results. We apply it to study the discrete Lotka-Volterra equation. Based on a relation between punctured surface and cluster algebra, we study the complex volume of once-punctured torus bundles on S^1 and two bridge knot complements in S^3 . We also formulated the conjecture on the complex volume of knot complement in terms of cluster algebra.

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数理物理学

キーワード：トロピカル幾何 クラスター代数 セルオートマトン 差分方程式 可積分系 結び目

1. 研究開始当初の背景

代数的完全可積分系とセルオートマトン

代数曲線、ヤコビ多様体、テータ関数のような代数幾何の手法を用いた古典可積分系の解析は基本的な問題である。これをトロピカル幾何を用いた区分線系写像の解析に広げる契機となったのが箱玉系という可積分なセルオートマトンである。箱玉系の数理構造はクリスタル(量子群の組み合わせ的極限)とトロピカル幾何(組合せ的代数幾何)という、出自の全く異なる組合せ的な理論によって記述される。クリスタルによる箱玉系の対称性の研究はほぼ完成しており、次は箱玉系の一般解に関する(クリスタルから得られた)結果がトロピカル幾何でどのように記述されるかが問題であった。これと密接に関連する結果として、2007~2009年に我々はトロピカル幾何を用いて超離散戸田格子の一般解を記述することに成功していた。

クラスター代数とその応用

クラスター代数は Fomin と Zelevinsky によって 2000 年頃に定式化された。クラスター代数に特徴的な代数操作である mutation が様々な分野の概念と対応しており、表現論、双曲幾何、ポアソン多様体、差分方程式などに関連する様々な応用が活発に研究されている。クラスター代数はトロピカル半群上の変数を持ち、代数の自然な量子化がある。可積分系の視点では、mutation と交換行列の対称性を用いた差分方程式の構成が重要であり、クラスター代数のポアソン構造に基づいた差分方程式の可積分性の定式化や、T システム、Y システムの一般化が研究されている。また、点付き曲面の三角形分割とクラスター代数の関係に基づき、結び目をはじめとする 3 次元双曲多様体の不変量の研究も行われている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代数幾何の手法を用いた古典可積分系の解析方法を、可積分な差分方程式や区分線形方程式の解析に拡張することである。将来的には、差分方程式、区分線形方程式と量子模型の間を繋ぐ可積分系の構造を手がかりに、トロピカル幾何と量子群、非可換幾何の新しい関係を見出すことを目指す。一方、クラスター代数の自然な非可換化(量子化)が差分方程式の非可換化の手掛かりとなる可能性があること、結び目の不変量は可積分系と密接な関係があることから、クラスター代数の応用についても積極的に研究を進める。

3. 研究の方法

これまでの研究の続きとして、箱玉系のスベクトル曲線に対応するものは何か、トロピカル Jacobi 多様体上が出てくるのは何故かを明らかにする。並行して、クラスター代数、量子クラスター代数を用いた差分方程式の構成、解析を行う。幾何的な側面も調べる。

研究を効率的に進めるため、関連分野(代数幾何、トロピカル幾何、クラスター代数、結び目理論)の専門家の意見を聞き、議論をしていく。研究費の多くは旅費に使用し、人的交流、特に共同研究の推進と情報収集に役立てる。集中的に情報収集と議論を進めるため、一定期間海外の研究機関に滞在する。

本課題の期間中は、以下にまとめたように 2 週間から 1 ヶ月の間、海外の研究機関に滞在した。クラスター代数の応用については国内よりむしろ国外で盛んに研究されており、積極的に情報を集める必要があった。交流の成果は十分に上がり、現在進行中のものも含む共同研究にも結び付いた。

- (1) Hausdorff Research Institute of Mathematics (Bonn, ドイツ) 2012 年 3 月、プログラム 'Integrability in Geometry and Mathematical Physics' に参加
- (2) Mathematical Sciences Research Institute (Berkeley, アメリカ) 2012 年 8 ~ 9 月、プログラム 'Cluster algebras' に参加
- (3) Poitiers 大学 (Poitiers, フランス) 2013 年 9 月、Pol Vanhaecke 教授のもとに滞在、代数的完全可積分系に関する共同研究を行った
- (4) Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Oberwolfach, ドイツ) 2013 年 12 月、プログラム 'Cluster algebras and related topics' に参加

4. 研究成果

- (1) 箱玉系とトロピカル曲線との関係の証明
まず J. Phys. A に依頼された review 論文(雑誌論文)と数理物理 Summer school (2011 年 8 月に東京大学で開催)の講演予稿をまとめることにより、既知の結果を整理するとともに問題の明確化を行った。そして Summer school の中で予想「周期箱玉系の一般等位集合を与える高次元実トーラスがあるトロピカル曲線のトロピカルヤコビ多様体である」を与えた。
その後、岩尾慎介氏との共同研究によってこの予想を証明し論文にまとめた(雑誌論文)。より詳しくは以下の手順による：無限箱玉系(境界が無い系)の時間発展方程式が離散

KdV 方程式の超離散化で書ける、という事実を周期系の場合にも定式化する。離散周期 KdV 方程式のスペクトル曲線をトロピカル化してトロピカル曲線の族を構成する。箱玉系の従属変数が 2 状態しかとらないことを取り入れて曲線族の特殊化を行う。

(2) 自己同型のあるスペクトル曲線を持つ代数的完全可積分系

1990 年に Beauville が導入した多項式行列の商空間上の代数的完全可積分系を制限することにより、新しい代数的完全可積分系の属が得られることが分かった。素数 p について、スペクトルパラメータの多項式を成分にもつ p 次正行列とそのスペクトル曲線に p 次巡回群の作用を定義する。

我々が示したのは以下である：

この作用で不変なスペクトル曲線 C の上に Beauville の系を制限できる。この制限によって等位集合は有限個の連結成分に分解し、その一つ一つが代数曲線 C' のアフィンヤコビ多様体と同型になる。さらに可換な時間発展はこの多様体上で線形化される。ただし C' は C を巡回群の作用で割った代数曲線である。

この研究は Pol Vanhaecke 氏、山崎隆雄氏との共同で行い、論文にまとめた。

(3) クラスタ代数のポアソン構造

クラスタ代数にはクラスタ変数、係数と呼ばれる 2 種類の従属変数があるが、これらの従属変数のポアソン括弧式を調べることは、クラスタ代数を力学系の研究に応用する際に基本となる問題である。我々はクラスタ変数と係数の関係に最小限の仮定を課して(無限の場合を含む)クラスタ代数のポアソン構造を構成し、先行する Fock ら、Gekhtman らの(主に有限の場合の)構成を自然に含む結果を得た。

クラスタ代数の性質を応用すると、新しい視点から差分方程式系の可積分性を説明できる可能性がある。その初めの段階として、ソリトン解を持つことが知られている「差分 Lotka-Volterra 方程式」を記述するようなクラスタ代数を構成した。まず無限の大きさの籠を新しく作り、この籠に対応するクラスタ代数を構成した。そして、この代数の生成関係式で特別な組を選ぶことによって目指す差分方程式を構成した。この構成方法は、中西による「クラスタ代数による一般化された T システム、Y システムの構成」の具体例になっている。さらに、(2)の結果を

応用してこの差分方程式の従属変数のポアソン括弧式を得た。

この研究は中西知樹氏と共同で行い、論文(雑誌論文)にまとめた。

(4) クラスタ代数と 3 次元双曲多様体

点付き曲面の三角形分割とクラスタ代数の関係をもとに 3 次元双曲多様体の不変量である複素体積(双曲体積 + i Chern-Simons 不変量)をクラスタ代数を使って定式化した。この研究は、長尾らによる結果 --- 双曲構造を持つ点付き曲面束の双曲体積のクラスタ係数を用いた定式化 --- の複素体積への拡張に対応する。

2 橋結び目と呼ばれるクラスの結び目の理想四面体分割は作間-Weeks によって与えられ、4 点付き球面束を境界で貼り合わせることで得られる。我々は、クラスタ代数のクラスタ変数と係数という 2 種類の変数を使って四面体分割の情報をクラスタ変数の代数方程式に翻訳し、Zickert の理論を用いて理想四面体の flattening を計算することが出来ることを示した。3 次元双曲多様体の理想四面体分割に対し個々の四面体の flattening が分かると、複素体積が求められる。最終的に 2 橋結び目の複素体積を求めた。S1 上の 1 点穴あきトーラス束についても同様の結果を得た。

組みひも群をクラスタ代数の mutation を使って実現し、任意の結び目について複素体積を計算する方法を構成した。実際の計算は技術的に難しく、数値計算が遂行できる例は現在のところ少ないが、双曲結び目でない場合にもこの方法が適用できることが観察され、体積予想との関係が示唆されている。

この研究は樋上和弘氏と共同で行い、論文(雑誌論文 他)にまとめた。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Kazuhiro Hikami and Rei Inoue, Cluster Algebra and Complex Volume of Once-Punctured Torus Bundles and Two-Bridge Knots, J. Knot Theory and Its Ramifications, 23, 1450006, pp. - (2014), 査読有, DOI:10.1142/S0218216514500060.

Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba and Tomoki

Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r, F₄, and G₂, Publ. RIMS, 49, pp. 43 - 85 (2013), 査読有.

Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba and Tomoki Nakanishi Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r, Publ. RIMS, 49, pp. 1 - 42 (2013), 査読有.

Rei Inoue and Shinsuke Iwao, Tropical curves and integrable piecewise linear maps, Contemp. Math., 580, pp. 21-39 (2012), 査読有.

Rei Inoue, Atsuo Kuniba and Taichiro Takagi, Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry, J. Phys. A, 45, 073001, pp. -, (2012), 査読有, DOI:10.1088/1751-8113/45/7/073001.

Rei Inoue and Tomoki Nakanishi, Difference equations and cluster algebras I: Poisson bracket for integrable difference equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B28, pp. 63 - 88 (2011), 査読有.

Rei Inoue and Shinsuke Iwao, Tropical spectral curves, Fay's trisecant identity, and generalized ultradiscrete Toda lattice, in "Proceedings of the Infinite Analysis 09: New Trends in Quantum Integrable Systems", eds. B. Feigin, et al., pp. 101 - 116 (World Scientific, 2011), 査読有.

[学会発表](計 12 件)

Rei Inoue, Application of cluster algebra to hyperbolic 3-manifolds, and complex volume of knots, RIKKYO MathPhys 2014 (立教大学), 2014 年 1 月 13 日.

Rei Inoue, Cluster algebra and complex volume of knots, Cluster algebra and related topics (Oberwolfach, ドイツ), 2013 年 12 月 12 日.

Rei Inoue, Cluster Algebra and Complex Volume of Knots, SIAM conference on applied algebraic geometry (Colorado State University, アメリカ), 2013 年 8 月 3 日.

井上 玲, 樋上 和弘; クラスター代数と 2 橋絡み目の複素体積, 日本数学会 2013 年度年会, 京都大学, 2013 年 3 月 20 日.

Rei Inoue, Cluster Algebra and Complex

Volume of Two-Bridge Knots, Low dimensional topology and number theory V, Soft Research Park, 福岡, 2013 年 3 月 14 日.

Rei Inoue, Tropical geometry and integrable systems, 研究プログラム Cluster algebra (MSRI, アメリカ), 2012 年 9 月 20 日.

Rei Inoue, Tropical geometry and integrable systems, NEEDS 2012 (Orthodox Academy of Crete, ギリシャ), 2012 年 7 月 10 日.

Rei Inoue, Tropical geometry and integrable cellular automata, Hausdorff Research Institute for Mathematics (Bonn 大学, ドイツ), 2012 年 3 月 21 日.

Rei Inoue, Tropical curves, tropical theta functions and integrable systems, SIAM conference on "Applied algebraic geometry" (North Carolina State University, アメリカ), 2011 年 10 月 6 日.

井上 玲, クラスター代数と可積分系, RIMS 研究集会「可積分系数理の進化」(代表者: 高橋大輔, 広田良吾), 京都大学, 2011 年 8 月 18 日.

Rei Inoue, Tropical geometry and ultradiscrete integrable systems, "Tropical geometry and integrable systems" (University of Glasgow, イギリス), 2011 年 7 月 4, 5 日.

Rei Inoue, Integrable difference equations and cluster algebras, The 7th IMACS International Conference on "Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory" (University of Georgia, アメリカ), 2011 年 4 月 5 日.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/reiinoue/site/Home>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 玲 (井上 玲)

(YAMAZAKI, Rei (INOUE, Rei))

千葉大学・理学研究科・准教授
研究者番号：30431901

(2)研究分担者 ()

研究者番号：

(3)連携研究者 ()

研究者番号：