

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740172

研究課題名(和文) ゲージ・重力対応における可積分性とグルーオン散乱振幅の解析

研究課題名(英文) Integrability in gauge-gravity correspondence and gluon scattering amplitudes

研究代表者

酒井 一博 (Sakai, Kazuhiro)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：10439242

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：ゲージ理論・弦理論において解析的かつ厳密な結果を得る上で、可積分性の重要性が高まっている。本研究ではゲージ・弦理論における可積分構造を幾つか解明し、これを最大限活用して解析的な結果を得た。具体的には4次元最大超対称ゲージ理論の強結合グルーオン散乱振幅を調べた。ゲージ重力対応によりこの振幅はある極小曲面の面積と関連づけられる。この対応に基づき我々はある種の一般的な散乱振幅を、2次元共形場理論を用いて計算する方法を定式化した。また我々は最も単純かつ無矛盾な6次元超対称場の理論であるE弦理論を調べた。トーラスコンパクト化で4次元にしたE弦理論のBPS分配関数の閉じた表式を構成し、その性質を解明した。

研究成果の概要(英文)：Integrability has become of increasing importance in obtaining analytic, exact results in gauge and string theories. In this research project we clarified several integrable structures in gauge and string theories and made full use of them to obtain analytic results. More specifically, we studied gluon scattering amplitudes at strong coupling in the maximally supersymmetric gauge theory in four dimensions. The gauge-gravity correspondence relates the amplitudes to the areas of certain minimal surfaces. Based on this correspondence we formulated a method of computing a general class of gluon scattering amplitudes by means of two-dimensional conformal field theories. We also studied the E-string theory, which is one of the simplest consistent supersymmetric field theories in six dimensions. We constructed a closed expression for the BPS partition function of the E-string theory toroidally compactified down to four dimensions and elucidated its properties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学 素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：素粒子(理論) 弦理論 可積分系 数理物理学 ゲージ重力対応

1. 研究開始当初の背景

(1) 素粒子物理学の要を記述する量子色力学(QCD)における散乱振幅の計算は、今なお解明に向けた努力が続けられている重要な研究テーマである。QCDの摂動論は高エネルギー領域においてよい近似を与え、実際にコライダー実験の解析等に威力を発揮している。QCDの散乱振幅の摂動計算は原理的には任意の次数まで実行可能であるが、実際問題としては計算が非常に大変で、具体的に一般性のある結果が得られているのは研究開始当時でも高々3ループ摂動の段階にとどまっていた。正攻法でQCDを解くのが難しい中、高次の摂動さらには全摂動和について知見を得るためのトイ・モデルとして、4次元 $N=4$ 超対称 $U(N)$ ゲージ理論(以下 $N=4$ ゲージ理論と略す)が脚光を浴びている。この理論は4次元のゲージ理論として最大の超対称性を持ち、そのためQCDに比べれば飛躍的に計算の容易な理論となっている。それにもかかわらず、この理論の摂動的グルーオン散乱振幅はQCDのそれと様々な質的振舞を共有し、実際にQCDのグルーオン散乱振幅の一部(maximally transcendental part)を表していることも観察されている。このため、解析的にQCDの散乱振幅の振舞を捉えるステップとして、 $N=4$ ゲージ理論のグルーオン散乱振幅が精力的に調べられていた。 $N=4$ ゲージ理論の研究がとりわけ活気づいている背景には、AdS/CFT対応と可積分性に関する研究の大きな進展がある。AdS/CFT対応はゲージ・重力対応のひとつで、その代表例が $N=4$ ゲージ理論と $AdS_5 \times S^5$ 時空上の超弦理論が等価であるという主張である。AdS/CFT対応の最大の特徴は強弱対応にあり、例えばゲージ理論の強結合極限が古典弦理論で記述できてしまう。このため既存の場の理論の手法では手の届かない強結合ゲージ理論の性質を調べる新たな手段として注目を集めている。一方の可積分性は $N=4$ ゲージ理論(および $AdS_5 \times S^5$ 時空上の超弦理論)の高い対称性の反映として見出されたもので、ゲージ理論の局所演算子の異常次元スペクトル問題(弦理論側での閉弦のエネルギースペクトル問題)が $1+1$ 次元の可積分模型として解ける事実が明らかになっている。AdS/CFT対応と可積分性を組み合わせた研究は2003年頃から急速に進展し、例えば諸々の異常次元計算の基本となるカスプ異常次元の具体形がゲージ結合定数の関数として(つまり摂動の全次数で)決定されるなど、輝かしい成果が得られている。この流れを受けて、 $N=4$ ゲージ理論のグルーオン散乱振幅の計算にもAdS/CFT対応や可積分性が利用できるのではないかと期待が高まっていた。少し前から、グルーオン散乱振幅の中でもMaximally Helicity Violating(MHV)振幅と呼ばれるクラスに対して、高次の摂動計算が低次の摂動計算の組み合わせで表せるという反復的な構造が見出され、計

算に利用されていた。その背景には双対共対称性と呼ばれるダイナミカルな対称性の存在が示唆されている。またBern-Dixon-Smirnov(BDS)は反復的構造の解析を押し進めて、MHV振幅の全摂動和が摂動の0次と1次の結果だけを組み合わせで書き下せるのではないかという予想(BDS予想)を提案した。これに対し、Alday-MaldacenaはAdS/CFT対応を用いることで、グルーオン散乱振幅の強結合極限を特定の境界条件を満たす古典開弦解の面積として計算するという方法を考案した。その結果、BDS予想は一般には成り立たないことが判明したが、BDS予想と真の振幅のずれ(remainder functionと呼ばれる)は有限であり、熱力学的Bethe仮説方程式型の積分方程式を解いて計算できることが、Alday-Gaiotto-Maldacenaにより簡単な例(6点散乱振幅)の場合に示された。

(2) 上述の進展とは独立に、弦理論の発展により、ラグランジアンに基づく従来の定式化では見えてこなかった多数の非自明な場の量子論の存在が明らかになっている。特に、様々な超対称場の量子論の親玉として、6次元の理論が近年脚光を浴びている。その中でもE弦理論は6次元で最小の超対称性を持つもので最も構成の単純な理論である。この理論はベクトル多重項を含まずテンソル多重項をひとつだけ含んでおり、基本的な励起は粒子ではなく自己双対テンソル場に付随した弦(E弦)が担う。

この種の未知の理論を調べる手段として、トラスコンパクト化で得られる低次元理論による有効的な記述がよく用いられる。E弦理論を2次元トラス T^2 にコンパクト化すると、低エネルギー有効理論は4次元 $N=2$ $U(1)$ 超対称ゲージ理論となり、Seiberg-Witten理論による記述が可能となる。このとき低エネルギー有効作用を与えるSeiberg-Wittenプレポテンシャルは、 T^2 の一方のサイクルに巻き付いたE弦のBPS状態の分配関数にもなっており、理論を特徴づける最も重要な関数である。この関数を級数展開の形で求める方法は1990年代後半から知られており、Seiberg-Witten曲線の周期積分を陰関数的に解く方法やモジュラーアノマリー方程式を逐次積分する方法があったが、関数をあらわに表す閉じた表式が存在するのかどうかは明らかでなかった。

通常の4次元 $N=2$ $U(N)$ ゲージ理論の場合、プレポテンシャルは局所化の手法やトポロジカルバーテックスとして知られる位相的弦理論の手法によってあらわな形が求められており、よく知られたNekrasov分配関数(の一部)として表される。これに対し、E弦理論をはじめとする6次元理論から派生する低エネルギー4次元 $N=2$ 理論において、同様の閉じた表式が得られるかどうかは、場の理論の枠内においても、数理論理学への応用上の観点からも、興味深い問いであった。

2. 研究の目的

(1) 強結合グルーオン散乱振幅の計算は、AdS/CFT 対応および可積分性を用いることで、熱力学的 Bethe 仮説方程式型の積分方程式を解く問題に帰着すると期待されていた。本研究では任意のグルーオン数の散乱振幅の場合において、この熱力学的 Bethe 仮説方程式の具体形を決定し、さらに方程式を解いてグルーオン散乱振幅の具体形を求めることを目指した。特に、前述の BDS 予想をはじめとするゲージ理論側の結果と比較・検証する上では、散乱振幅をグルーオン運動量の解析的な関数として求めることが望ましく、そのために熱力学的 Bethe 仮説方程式の解を解析的に求めることを目指した。

(2) E 弦理論のプレポテンシャルを表す閉じた表式の構成を目指した。通常の 4 次元 $N=2$ $U(N)$ ゲージ理論の場合と異なり、E 弦理論の場合にはプレポテンシャルの構成に局所化の手法やトポロジカルバーテックスの手法を適用することができない。このため代替となる手法の開発も目標とした。

3. 研究の方法

(1) まず最初に、前述の Alday-Gaiotto-Maldacena による 6 点散乱振幅の場合の熱力学的 Bethe 仮説方程式の導出を一般化することで、一般の n 点散乱振幅の場合の熱力学的 Bethe 仮説方程式の具体形の決定に取り組んだ。ここで現れる熱力学的 Bethe 方程式は、その形から何らかの 2 次元の有質量可積分粒子モデルを記述すると考えられる。この種の 2 次元有質量可積分粒子モデルは、ある 2 次元共形場理論からの可積分摂動によって得られることが知られており、熱力学的 Bethe 仮説方程式の解および系の自由エネルギー（散乱振幅に対応する）を摂動展開の形で解く研究が 1990 年代に行われている。さらに、摂動展開の係数は摂動前の 2 次元共形場理論の特定の相関関数により表される。伝統的な可積分系の分野で培われてきたこれらの結果を応用することで、グルーオン散乱振幅の熱力学的 Bethe 仮説方程式の解を、2 次元共形場理論を用いて解析的に求める手法の構築に取り組んだ。

(2) 通常の 4 次元 $N=2$ ゲージ理論のプレポテンシャルを与える Nekrasov 分配関数については、形式的な 5 次元および 6 次元への拡張が知られている。この形をヒントにして、E 弦理論のプレポテンシャルが、期待される対称性（具体的には大域的 E_6 対称性やモジュラー対称性、特にモジュラーアノマリー方程式による制限）を満たし、かつ既知の級数展開法で得られる低次の結果を再現するように、Nekrasov 型の表式を推測した。

4. 研究成果

(1) 研究代表者の酒井は京都大学基礎物理

学研究所の初田泰之氏、東京工業大学の伊藤克司氏、筑波大学の佐藤勇二氏と共同で、可積分性を利用し一般の n 点散乱振幅を求める方法の開発に取り組み、以下に述べる一連の成果を得た。論文 において、我々はグルーオン運動量が 2 次元に収まる場合に、一般の n 点散乱振幅を記述する熱力学的 Bethe 仮説方程式の一般形を提唱した。この結果は、我々の論文とほとんど同時に発表された Alday-Maldacena-Sever-Vieira による同内容の論文の結果と完全に一致した。さらに論文 では、この熱力学的 Bethe 仮説方程式が、Homogeneous sine-Gordon 模型として知られる 2 次元可積分模型の熱力学的 Bethe 仮説方程式と本質的に一致することを指摘した。我々は続けて上述の熱力学的 Bethe 仮説方程式を 2 次元共形場理論の可積分摂動を用いて解き散乱振幅を計算する手法を開発した。まず、任意のグルーオンの運動量を許したときの最初の非自明な例となる 6 点振幅の場合に、上述の 2 次元共形場理論の可積分摂動の方法を展開し、論文 にまとめた。さらに論文 においては、グルーオン運動量が 2 次元に収まる場合の一般の n 点散乱振幅に対して、上述の 2 次元共形場理論の可積分摂動の方法の一般論を構築した。具体例として 8 点振幅および 10 点振幅の場合に、解析的な係数による散乱振幅の摂動展開を行い、上述の方法の有効性を実証した。我々の手法は一般の n 点散乱振幅の解析的な表式を議論できるという点で画期的であり、弱結合における散乱振幅の摂動計算の結果とあわせて、一般の結合定数におけるグルーオン散乱振幅を求める上での土台を与えると期待される。

(2) 酒井は Nekrasov 分配関数によく似た、E 弦理論の BPS 分配関数をあらわに与えるコンパクトな表式を見だし、論文 に発表した。この表式は発見法的に求めたものであるが、既存の方法で計算される級数展開を正しく再現し、期待される対称性を持つことを証明することで、その正当性を十分に検証した。さらに論文 においては、トラスコンパクト化の際に境界条件をひねることで E 弦理論の大域的対称性が部分的に敗れる場合においても、同様の表式を構成した。また立命館大学の石井健准氏との共著論文 では、行列模型の手法を用いて、上述の Nekrasov 型公式の熱力学的極限が以前から知られていた E 弦理論分配関数の Seiberg-Witten 曲線による（陰関数的な）表示に一致することを証明した。これにより E 弦理論の BPS 分配関数のあらわな公式が確立した。

通常の 4 次元 $N=2$ $U(N)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数は局所化の手法により導出できる。また同ゲージ理論は弦理論をトーリック Calabi-Yau 多様体にコンパクト化して実現できることから、Nekrasov 分配関数はトポロジカルバーテックスの手法を用いて求めることもできる。これに対し、E 弦理論の場合

はラグランジアンが知られておらず、また弦理論コンパクト化による実現もトーリックでない Calabi-Yau 多様体を用いるため、どちらの手法もそのままでは適用できない。この意味で上述の表式の発見は、超対称場の理論における厳密計算や位相的弦理論の分野において、既存の手法の適用限界を超えた真に新しい成果と言える。このような単純で美しい表式が得られる背景には何かしら理由があるはずであり、それを探ることで今後 6 次元理論のさらなる理解ならびに分配関数の厳密計算の手法の拡張等、様々な方向の発展がもたらされると期待される。

(3) 超弦理論の統一的記述を与える M 理論は、粒子に代わり M2 プレーンと M5 プレーンが基本構成要素をなす。寺嶋靖治氏との共同研究(論文)では、近年明らかにされた M2 上の低エネルギー理論(ABJM 理論)において、超対称性を半分保つ状態(1/2 BPS 状態)を定める BPS 方程式を調べた。我々はこの BPS 方程式に古典可積分性があることを発見した。さらにこの可積分性を活用して M2-M5 束縛状態を表す解を系統的に構成する方法を構築した。可積分性を用いて M 理論に現れる BPS 方程式の一般解を系統的に調べるといふ本研究の手法は、従来の勘や試行錯誤頼りの解の構成法と比べ論理的かつ非常に強力であり、今後 M 理論を解明する上での研究基盤の一翼を担うと期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Takenori Ishii and Kazuhiro Sakai, "Thermodynamic limit of the Nekrasov-type formula for E-string theory," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 02(2014)087, pp.0-17, DOI:10.1007/JHEP02(2014)087
Kazuhiro Sakai and Seiji Terashima, "Integrability of BPS equations in ABJM theory," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 11(2013)002, pp.0-20, DOI:10.1007/JHEP11(2013)002
Kazuhiro Sakai, "Counting BPS states in E-string theory," *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 査読無, 21(2013), pp.116-125, DOI:10.1142/S201019451300946X
Kazuhiro Sakai, "Seiberg-Witten prepotential for E-string theory and global symmetries," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 09(2012)077, pp.0-19, DOI:10.1007/JHEP09(2012)077
Kazuhiro Sakai, "Seiberg-Witten prepotential for E-string theory and

random partitions," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 06(2012)027, pp.0-12, DOI:10.1007/JHEP06(2012)027
Yasuyuki Hatsuda, Katsushi Ito, Kazuhiro Sakai, Yuji Satoh, " g -functions and gluon scattering amplitudes at strong coupling," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 04(2011)100, pp.0-45, DOI:10.1007/JHEP04(2011)100
Yasuyuki Hatsuda, Katsushi Ito, Kazuhiro Sakai, Yuji Satoh, "Six-point gluon scattering amplitudes from Z_4 -symmetric integrable model," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 09(2010)064, pp.0-25, DOI:10.1007/JHEP09(2010)064
Yasuyuki Hatsuda, Katsushi Ito, Kazuhiro Sakai, Yuji Satoh, "Thermodynamic Bethe Ansatz Equations for Minimal Surfaces in AdS_3 ," *Journal of High Energy Physics*, 査読有, 04(2010)108, pp.0-23, DOI:10.1007/JHEP04(2010)108

[学会発表](計 17 件)

Kazuhiro Sakai, "Integrability of BPS equations in ABJM theory," Workshop "Progress in the synthesis of integrabilities arising from gauge-string duality (JSPS/RFBR collaboration)," 2014 年 3 月 7 日, KKR ホテルびわこ / 立命館大学(滋賀県)
Kazuhiro Sakai, "Integrability of BPS equations in ABJM theory," Conference "Integrability, Symmetry and Quantum Space-Time," 2014 年 1 月 7 日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府)
酒井 一博, "ABJM 理論における BPS 方程式の可積分性," 日本物理学会 2013 年秋季大会, 2013 年 9 月 22 日, 高知大学(高知県)
酒井 一博, "Integrability of BPS equations in ABJM theory," 第 10 回日露共同研究 working seminar, 2013 年 6 月 5 日, 大阪市立大学文化交流センター(大阪府)
酒井 一博, "E 弦理論と Nekrasov 型公式(第 7 回中村誠太郎賞受賞講演)," 日本物理学会第 68 回年次大会, 2013 年 3 月 26 日, 広島大学(広島県)
酒井 一博, "BPS states and integrability," 日露共同研究ミニワークショップ, 2013 年 3 月 24 日, ホテル VIARE 大阪 / 大阪科学技術センター(大阪府)
酒井 一博, "E 弦理論と Nekrasov 型公式," 研究集会「場の数論とトポロジー」, 2013 年 2 月 7 日, 信州大学(長野県)

Kazuhiro Sakai, "Counting BPS states in E-string theory (informal seminar)," YIPQS long-term workshop "Gauge/Gravity Duality," 2012年10月1日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府)

Kazuhiro Sakai, "Counting BPS states in E-string theory," Conference "Synthesis of integrabilities in the context of gauge/string duality," 2012年9月21日, Steklov Mathematical Institute / State University - Higher School of Economics, Moscow (Russia)

酒井 一博, "E弦理論におけるBPS状態の教え上げ," 日本物理学会2012年秋季大会, 2012年9月13日, 京都産業大学(京都府)

酒井 一博, "E弦理論のSeiberg-Witten解と Nekrasov型公式," 基礎研究会「場の理論と弦理論」, 2012年7月26日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府)

Kazuhiro Sakai, "Counting BPS states in E-string theory," Conference "Progress in Quantum Field Theory and String Theory," 2012年4月6日, 大阪市立大学(大阪府)

酒井 一博, "位相的弦理論と保型性 - Seiberg-Witten 曲線, 有理楕円曲面, Jacobi 形式 - (無限可積分系分科会特別講演)," 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月29日, 東京理科大学(東京都)

酒井 一博, "集中講義: 量子可積分系の基礎," 東京工業大学・茨城大学素粒子論研究室合同研究会 2011, 2011年10月8-9日, 草津セミナーハウス(群馬県)

Kazuhiro Sakai, "Conformal perturbation theory for gluon scattering amplitudes," Institut d'Été de Physique et Mathématique "Double Affine Hecke Algebras, the Langlands Program, Conformal Field Theory, Super Yang-Mills Theory," 2011年7月15日, Cargèse (France)

Kazuhiro Sakai, "Solving thermodynamic Bethe ansatz equations for gluon scattering amplitudes," Synthesis of integrabilities in the context of gauge/string duality, 2010年9月21,23日, Steklov Mathematical Institute / State University - Higher School of Economics, Moscow (Russia)

酒井 一博, "AdS₃ 時空における有限ギャップ型開弦解," 日本物理学会2010年秋季大会, 2010年9月13日, 九州工業大学(福岡県)

〔図書〕(計0件)

なし

〔産業財産権〕

なし

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 一博 (SAKAI KAZUHIRO)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号: 10439242

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし