

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 13 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740251

研究課題名（和文） 一次元確率過程モデルの動的性質の厳密な解析

研究課題名（英文） Exact analyses on dynamical properties of one-dimensional stochastic models

研究代表者

今村 卓史 (IMAMURA TAKASHI)

東京大学先端科学技術研究センター・助教

研究者番号：70538280

研究成果の概要（和文）：

流れのある非平衡系を記述する確率モデル、特に多体ランダムウォーク模型である 1 次元非対称単純排他過程、および界面成長を記述する 1 次元 Kardar-Parisi-Zhang 方程式において、物理量の時間発展を理論的に解析した。任意の時刻において高さ、流れといった重要な物理量の確率分布関数の厳密解をいくつかの重要な初期条件の場合に得た。

研究成果の概要（英文）：

We have investigated exact time evolution properties of the stochastic models which describe nonequilibrium systems especially the asymmetric simple exclusion process, which is a many-body random walk model and the Kardar-Parisi-Zhng equation, a basic equation for surface growth phenomena. In some important initial conditions, we have obtained exact expressions for the probability distribution functions of some important physical quantities such as current, height etc.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：数理物理

1. 研究開始当初の背景

本研究課題がスタートした 2010 年度の周辺は、当該分野において重要な成果が表れ始めた時期であった。具体的には以下のとおりである。

(1) 1 次元非対称単純排他過程のカレント分布

非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP) は排他的相互作用する多粒子ランダムウォーク模型であり、交通流やイオン伝導体、mRNA 上のリボゾームの運動のモデル等非平衡系の広い分野に応用されている。

1 次元格子上の ASEP において、粒子が一方向のみに動く場合カレント(ある時刻までに

あるサイトを通じた粒子数)の確率分布は2000年にJohanssonによって研究されたが、粒子が左右両方に動く場合の解析は行われていなかった。

TracyとWidomは2008-2009年にかけてこの問題を解析し、Step型と呼ばれる初期条件において、カレント確率分布関数をFredholm行列式を用いて表わすことに成功した。さらに時刻が無限大において、カレント分布関数がGUE Tracy-Widom分布と呼ばれる。ランダム行列の最大固有値分布に収束することを明らかにした。

(2) 1次元 Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式の高さ分布関数

1次元 Kardar-Parisi-Zhang 方程式は界面成長を記述する非線形確率微分方程式であり、界面揺らぎの普遍的な自己アフィン性(KPZ 普遍クラス)を表わす方程式として知られている。また Burgers 乱流やランダム媒質中の高分子鎖など幅広い物理系への応用が知られている。

2010年に笹本-SpohnとAmir-Corwin-Quastelは独立に、narrow wedgeと呼ばれる初期条件の場合に1次元KPZ方程式における高さ分布の厳密解を得た。さらに得られた分布関数は短時間極限でガウス分布に長時間極限で(1)にも現れたGUE Tracy-Widom分布になることが明らかになった。したがってKPZ方程式であらわされる界面は、短時間極限では線形のEdwards-Wilkinson 普遍クラスに属し長時間極限でKPZ 普遍クラスに属するような普遍的なクロスオーバーの性質を示すことが明らかになった。

この結果はASEPが弱駆動極限においてKPZ方程式に収束するというBertini-Giacominの結果とASEPに関する上記のTracy-Widomの結果を組み合わせることで得られた。

(3) KPZ 方程式のレプリカ法による解析

レプリカ法はランダム系の統計物理学において、強力な解析手法として知られている。KPZ方程式のレプリカ法は1987年にKardarによって提唱された。KPZ方程式の高さの n 次指数モーメント(n レプリカ分配関数)の時間発展が n 粒子1次元引力相互作用のLieb-Linigerモデル(デルタ関数で相互作用するボーズ粒子系)で記述されるということが重要である。

2010年にDotsenkoとCalabrese-Le Doussal-Rossoは独立にレプリカ法を用いて上記(2)の高さ分布関数の厳密解を再現することに成功した。Lieb-LinigerモデルのBethe仮説による固有値、固有エネルギーの表示を用いて、それらをすべて足し上げることによりレプリカ分配関数の母関数のFredholm行列式表示を得た。高さ分布関数はこの母関数

からただちに導出される。

(4) KPZ 普遍クラスに属する界面の実験的検証

KPZ方程式、KPZ 普遍クラスは非平衡統計物理学において確立されていたが、それを示す実験系はごく少数しか知られていなかった。

2010年に竹内-佐野は液晶乱流の2つ相の境界面の成長を詳細に調べ、界面の揺らぎが時間の $1/3$ 乗で成長していくことを明らかにした。さらに揺らぎの確率分布関数が円形界面の場合GUE Tracy-Widom分布に従うことを明らかにした。これはTracy-Widom分布が実験的に検証された初めての例である。

2. 研究の目的

上記の研究背景で述べた一連の進展は、主にASEPにおけるStep型、KPZ方程式におけるnarrow-wedge型初期条件という特別な初期条件に関するものであった。しかし非平衡系においては系の初期条件や境界条件の影響がバルクにまで及ぶ。これは平衡系には現れない非平衡系特有の性質であるため重要である。

本研究課題で私はASEPとKPZ方程式において物理量の確率分布関数の厳密解を、物理的に重要と思われるいくつかの初期条件において得ることを目的とした。そのために上記のレプリカ法の背後に潜む数理構造を明らかにして、様々な初期条件で解析できるように手法の洗練化を行う必要がある。

さらに得られた確率分布関数の物理的意味や以前のKPZ 普遍クラスの厳密解研究での成果との関係を明らかにすることも目的である。

3. 研究の方法

本研究課題は、数理物理的色彩の強い研究であり、研究手法は統計物理、可積分系、確率論で用いられる解析的な手法である。具体的には上記のレプリカ法やベータ仮説等である。数値計算、数値シミュレーションは結果を確認するために補助的に用いることはあるが、主要な手法ではない。

4. 研究成果

(1) 双対性によるASEPのカレント分布関数の解析

KPZ方程式のレプリカ法の重要な知見は高さの n 次指数モーメントという無限自由度の物理量が n 粒子のLieb-Linigerモデルという有限自由度の物理系で記述されることである。これは我々にある種の双対性を連想させる。

我々はSchutzによって明らかにされたASEPの双対性に着目し、これを利用することで(KPZ方程式のように)カレントの N 次指数モーメントの解析的な表示を得た。まずカレ

ントの N 次指数モーメントが 1 個から N 個の粒子系の ASEP のグリーン関数を用いて表わされること明らかにして、これを利用することで、一般の初期配置で成り立つ N 次指数モーメントの表式を得た。カレントの N 次指数モーメントについては、これまで Tracy-Widom によって特定のいくつかの初期条件で計算されていた。我々はそれを含んだ一般の初期条件における積分表示を得た。

この双対性は ASEP の持つ $U_q(sl_2)$ 対称性の帰結として現れる。したがって本研究は、ASEP の持つ代数構造とカレント指数モーメントの行列式構造との関係を初めて明らかにした点で注目された。実際本研究結果が公表された後、Borodin-Corwin-笹本は ASEP におけるカレント指数モーメントの母関数の Fredholm 行列式を得ることに成功している (arXiv:1207.5035)。これは ASEP におけるレプリカ法とみなすことができ、KPZ 方程式の場合とは異なり、数学的に厳密である。

(2) 半ブラウン運動初期条件における KPZ 方程式のレプリカ法による解析

2010 年の KPZ 方程式の初めての厳密解は narrow-wedge 型初期条件におけるものであり、これは円形成長等の曲率のある界面を代表する初期条件と考えられる。他方 KPZ 方程式の定常状態は空間方向においてブラウン運動的であることが知られている。この 2 つの代表的な初期条件が原点で結合したものを半ブラウン運動型初期条件と呼ぶ。

我々は半ブラウン運動型と呼ばれる初期条件における KPZ 方程式の高さ分布の厳密解を得た。手法はレプリカ法を用いた。上記のとおりレプリカ法では高さの N 次指数モーメントの時間発展が N 粒子の Lieb-Liniger 模型の時間発展で書けるという性質を利用する。一次元 Lieb-Liniger 模型のハミルトニアン固有値と固有関数はベーテ仮説によって得られる。ただし時間発展を議論するためにはこれらのすべての寄与を足し上げなくてはならない。足し上げには個々の初期条件に応じて異なる技法が必要である。我々は半ブラウン運動型初期条件における足し上げの技法を開発することによって高さの N 次指数モーメントの母関数のフレドホルム行列式表示を得た。高さの分布関数はそれからただちに得られる。

本研究結果は Journal of Physics A に論文として出版されたが、Journal of Physics A 誌の Highlights of 2011 collection および英国物理学会の IOP select に選ばれた。

(3) 定常界面における KPZ 方程式の高さ分布関数の厳密解

上記(2)のとおり KPZ 方程式定常界面は空間方向についてブラウン運動的であるが、こ

のような 1 次元空間の両側にわたってブラウン運動的に広がった初期条件はその数理的取り扱いが困難であり、高さ分布の厳密解の導出は行われていなかった。

我々は、このような(両側)ブラウン運動初期条件における解析手法を開発して、その高さ分布関数の厳密解の導出に初めて成功した。さらにこの解を用いて高さの時空間 2 点相関関数の厳密な表示を得た。この 2 点関数は、数値シミュレーションや様々な解析手法(モード結合理論、くりこみ群)で解析されている。したがって本研究で得られた厳密解はこれらの手法の正当性を議論するうえで重要な役割を果たすと期待される。

また長時間極限においてこれらの量は、Baik-Rains, Praehofer-Spohn, Ferrari-Spohn らによる KPZ 普遍クラスの可解模型の研究で得られていたものに一致することも示した。

本研究結果は Physical Review Letters および Journal of Statistical Physics 誌に掲載されたが、前者は Physical Review Letters の Editor's choice に選ばれた。またアメリカ物理学会の website Physics に研究成果が紹介された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① 西野 晃徳、今村 卓史、羽田野 直道、I-V characteristics of an open quantum dot with a Coulomb interaction: Extension of the Landauer formula with exact scattering eigenstates, Physical Review B、83、2011、035306

DOI: 10.1103/PhysRevB.83.035306

② 今村 卓史、笹本 智弘、Current moments of 1D ASEP by duality, Journal of Statistical Physics、142、2011、919--930

DOI: 10.1007/s10955-011-0149-3

③ 今村 卓史、笹本 智弘、Replica approach to the KPZ equation with the half Brownian motion initial condition, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical、44、2011、385001

DOI: 10.1088/1751-8113/44/38/385001

④ 今村 卓史、笹本 智弘、Exact Solution for the Stationary Kardar-Parisi-Zhang Equation, Physical Review Letters、108、2012、190603

DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.190603

⑤ 友枝 明保、柳澤 大地、今村 卓史、

西成 活裕

Propagation speed of a starting wave in a queue of pedestrians, Physical Review E, 86, 2012, 36113

DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036113

⑥ 今村 卓史・笹本 智弘、Stationary Correlations for the 1D KPZ Equation, Journal of Statistical Physics、150、2013、908-939

DOI: 10.1007/s10955-013-0710-3

[学会発表] (計 16 件)

①今村卓史、Nonequilibrium transport properties in an open quantum dot: Exact many-electron scattering state, STATPHYS24、2010年7月20日、Convention Centre, Cairns, Queensland, Australia

②今村 卓史、KPZ, δ -Bose gas, and random matrices、RIMS 研究集会 2010 可積分系数理の多様性、2010年8月18日、京都大学数理解析研究所

③今村 卓史、Dynamics of a Tagged Particle in the Asymmetric Exclusion Process with Particlewise Disorder、Workshop TCA - First international workshop on Traffic and Cellular Automata、2010年9月21日、Ascoli Piceno, Italy

④今村 卓史、ASEP におけるカレント分布: 双対性からのアプローチ、非線形波動研究の新たな展開 -現象とモデル化-、2010年10月30日、九州大学応用力学研究所

⑤今村 卓史、ランダム行列理論と直交多項式、非線形数理若手の会、2010年11月16日、九州大学西新プラザ

⑥今村 卓史、レプリカベータ仮説法による1次元 KPZ 方程式の厳密解、非平衡系の物理 -ミクロとマクロの架け橋、2011年8月18日、京都大学基礎物理学研究所

⑦今村 卓史、半ブラウン運動型初期条件における1次元 KPZ 方程式の厳密解:レプリカベータ仮説法によるアプローチ、日本物理学会 2011年秋季大会、2011年9月23日、富山大学

⑧今村 卓史、KPZ 普遍クラスにおける厳密解、非線形波動研究の進展 -現象と数理の相互作用-、2011年10月29日、九州大学筑紫地区総合研究棟筑紫ホール

⑨今村 卓史、Replica analysis of the stationary 1d KPZ equation, Interacting particle systems, growth models and random matrices、2012年3月19日、Warwick University、U.K.

⑩今村 卓史、定常状態における1次元 KPZ 方程式の厳密な高さ分布、日本物理学会第67回年次大会、2012年3月26日、関西学院大

学西宮上ヶ原

キャンパス

⑪今村 卓史、Replica analysis of the stationary 1d KPZ equation, Recent Topics of Statistical Mechanics and Probability Theory、2012年3月29日、中央大学

⑫今村 卓史、一次元KPZ方程式の厳密解:レプリカ法によるアプローチ、駒場物性セミナー、2012年05月18日、東京大学駒場キャンパス

⑬今村 卓史、Replica analysis of the one-dimensional stationary Kardar-Parisi-Zhang equation, International Congress on Mathematical Physics (ICMP) 12、2012年08月08日、Aalborg Congress and Culture Center, Denmark

⑭今村 卓史、Replica analysis of the one-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation, Novel development of statistical physics、2012年12月04日、東京大学小柴ホール

⑮今村 卓史、Replica analysis of the one-dimensional stationary Kardar-Parisi-Zhang equation, Spectra of Random Operators and Related Topics、2012年12月06日、京都大学人間・環境学研究科棟

⑯今村 卓史、Replica approach to the KPZ equation with Brownian motion initial condition, Determinantal Processes and Related Topics、2013年03月11日、Technische Universität München, Germany

[その他]

ホームページ等

Scaling the Heights

<http://physics.aps.org/synopsis-for/10.1103/PhysRevLett.108.190603>

先端研 NAVI : 第 55 号 2012 年 6 月 15 日

<http://www.rcast.u-tokyo.ac.jp/ja//magazine/archive/0/74.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今村 卓史 (IMAMURA TAKASHI)

東京大学・先端科学技術研究センター・助教
研究者番号: 70538280