

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 4日現在

機関番号：82110

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740369

研究課題名（和文） 非一様プラズマにおける無限自由度モード間相互作用のハミルトン力学的研究

研究課題名（英文） Hamiltonian study of infinite-dimensional mode couplings in non-uniform plasmas

研究代表者

廣田 真 (HIROTA MAKOTO)

独立行政法人日本原子力研究開発機構・核融合研究開発部門・任期付研究員

研究者番号：40432900

研究成果の概要（和文）：自然界や実験装置において観測されるプラズマの非一様な空間構造の形成メカニズムを探るため、従来用いられてきた局所近似(短波長近似)が成り立たないような巨視的(長波長)揺らぎに対するモード間相互作用の理論を構築した。無限自由度のハミルトン力学系の理論を発展させた新しい数理的技法を開発することにより、連続スペクトルまで考慮した巨視的モード間相互作用の定式化と具体的な現象への応用に成功した。

研究成果の概要（英文）：Toward understanding the formation mechanisms of non-uniform spatial structures in astrophysical and laboratory plasmas, general mode-coupling theory is developed for global (or long wavelength) fluctuations, for which the conventional local (or short wavelength) approximation is not valid. By developing new mathematical techniques that base on the theory of infinite-dimensional Hamiltonian system, the global mode-coupling, which may include continuous spectrum, is successfully formulated and it is applied to specific phenomena.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	1500,000	450,000	1950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：プラズマ科学・プラズマ科学

キーワード：プラズマ物理、ハミルトン力学

## 1. 研究開始当初の背景

太陽表面や降着円盤における宇宙プラズマや、核融合実験装置において閉じ込められたプラズマでは、磁場や圧力分布に非一様な空間構造が形成されている。これらの構造を支配しているのは、マイクロな散逸・拡散過程よりも、**揺らぎ（波動）と平均場の非線形相互作用**であると考えられているが、そのメカニズムは十分に解明されてはいない。揺らぎと平均場の相互作用の研究は1960年代から行

われ、いわゆる波動運動論として確立したが、これはアイコナール近似に基づいている(すなわち、揺らぎが短波長であるとし、局所的には平面波の分散関係が成り立つとしている)。その意味で、波動運動論はメソスケールの揺らぎを扱う。

しかし、平均場の非一様性が無視できないほど波長が長いマクロスケールの揺らぎに対しては、一般に分散関係式は得られず、固有値問題に相当する微分方程式を解かなければならない。さらに、プラズマの揺らぎに

は固有値(離散スペクトル)に対応する固有モードだけでなく、連続スペクトルに対応する連続モードも存在し、従来の波動運動論や有限自由度力学系の理論は根本的に適用できない。このような**無限自由度かつ巨視的(長波長)なモード間の相互作用**は、理論構築が非常に難しく、統一的な解析手法も存在していなかった。

## 2. 研究の目的

本研究では無限自由度のハミルトン力学系の理論を開拓し、長波長領域の揺らぎ(固有モードや連続モード)に対するエネルギーや運動量を厳密に議論する。そして、連続モードも考慮に入れたモード間相互作用の体系的な理論を構築し、揺らぎの安定性や非線形発展を明らかにすることを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) 非一様な平均場(平衡)のまわりの線形摂動は、もはや平面波では表せず、しばしば固有値問題を解くことによって固有モード分解が行われる。ただし本研究では、より正確に連続スペクトルの存在も考慮するため、ラプラス変換を用いた**スペクトル分解**を行う。すなわち、揺らぎを固有モードと連続モードの重ね合わせで表す。さらに本研究は、散逸を含まないプラズマの方程式に共通する**ハミルトン構造**に基づき、揺らぎのエネルギー(ハミルトニアン  $\delta^2 H$ )を以下のように固有モードと連続モードのエネルギー和へ分解することに成功している[Hirota & Fukumoto, J. Math. Phys. **49**, 083101 (2008)]。

$$\delta^2 H = \sum_n \omega_n \mu_n + \int_{\sigma} \omega \mu(\omega) d\omega$$

・ 離散スペクトル(固有値):  $\omega_1, \omega_2, \dots$

・ 連続スペクトル:  $\sigma$

ここで、 $\mu_n$  や  $\mu(\omega)$  はそれぞれのモードに対して定義される**波の作用**(wave action)、または**作用変数**を表す。この表式は、いわゆる標準形と呼ばれる公式

$$\begin{aligned} & \text{(振動モードのエネルギー)} \\ & = (\text{振動数 } \omega) \times (\text{作用変数 } \mu) \end{aligned}$$

が連続モードにも適用できることを意味し、無数の振動モードの積分和で表される所が有限自由度力学系には見られない特徴である。ちなみに角変数はそれぞれのモードの位相角に一致し、上記の標準形を得ることは揺

らぎの**作用・角変数表示**を行うことと等価である。

(2) 有限自由度のハミルトン系では、正と負のエネルギーをもつモード同士の共鳴相互作用によって不安定性が起きることで知られている(Krein-Moser 理論)。ここで、負のエネルギーをもつモードの身近な例としては、コマの歳差運動が挙げられ、平衡状態の回転エネルギーを減少させるような揺動である。

本研究は、上記で得られた連続モードのエネルギーに対しても同様な理論が存在すると予想し、**連続スペクトルも考慮した共鳴相互作用の定式化**を行った。

(3) あるモードが不安定成長したり、外力などによって振幅が顕著に大きくなったりすると、さらに非線形性によるモード間相互作用が起こる。もっとも基本的なのは二次の非線形項に起因する**三波相互作用**であり、共鳴条件( $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ )を満たす三つの波の間でエネルギーをやりとりする。このような相互作用が数多くのモード間で効率的かつ連鎖的に起きれば、弱乱流状態となって揺らぎは飽和する。しかし、この**弱乱流理論**も背景場がほとんど一般的な平面波に対してしか確立していない。なぜなら、一般のモードに対しては波数ベクトルが使えず、微分作用素となるため、素朴に摂動展開を行うと非線形段階で非常に煩雑な計算となるからである。さらに固有モード間の直行性も破れるため、共役な固有モードも別途求める必要がある。

これに対し、本研究は再び方程式がもつハミルトン構造に着目し、**Lie 摂動展開と変分原理**を活用することで、モード間の相互作用が最小限の計算で定式化できることを示した。また、相互作用を記述する振幅方程式を変分原理によって導出することにより、自動的にエネルギー保存則を満たすような標準形を得る。微分作用素はすべて Lie 微分の性質をもつことがわかり、波数ベクトルを用いることなく、体系的にモード間の相互作用の強さ(結合係数)を導出した。

## 4. 研究成果

(1) 固有モードと連続モードの相互作用に対するエネルギーの符号を用いた安定性判別法

固有モードと連続モードが共鳴する現象の典型例としてはランダウ減衰(または成長)がある。これは波が無数の粒子と相互作用した結果、波が減衰または成長する現象である。プラズマでは、このように波やモードが無衝突かつ時間的に可逆な過程で減衰/成長する

例が数多くあり、本研究ではこれらすべてを固有モードと連続モードの共鳴として力学的に取り扱った。

波が減衰する場合、ランダウ(1946)は物理的には解釈しにくい複素関数論の解析接続を用い、別のリーマン面において仮想的な固有値が存在することを示した(図1右:これは準モードなどと呼ばれる)。本研究ではこれに対し、エネルギー保存則に則した視点から安定性の判別を可能にした。

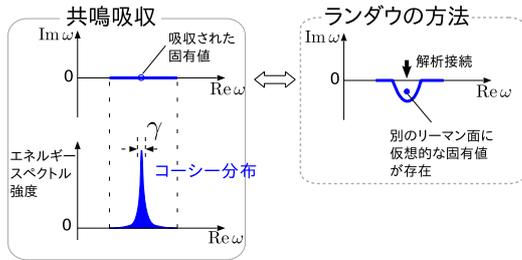


図1. 固有振動数  $\omega$  の複素平面におけるスペクトル(青色)の分布

具体的には共鳴する固有モードと連続モードのエネルギーの符号が**同符号**であった場合にのみ、固有モードのエネルギーが連続スペクトルに吸収されることがわかった。この時、連続スペクトルの中でコーシー分布型のスペクトルのピークが存在し、その幅が減衰率に対応することを示した(図1左)。逆に、エネルギーの符号が**異符号**であった場合、固有モードは不安定化することがわかった。つまり、Krein-Moser の理論とよく似たハミルトン力学的な解釈が、固有モードと連続モードの共鳴にも当てはまることがいえる。

プラズマの平均場が広い意味で「流れ」(回転)をもつ場合、負のエネルギーをもつ固有モードや連続モードが存在する(前述のコマの歳差運動と類似している)。よって、このようなエネルギーの符号を用いた安定性判別は、特に「流れ」の安定性を理解するために重要となることが考えられる。

さらに本研究は、平均場がゆっくりと変化した際、揺らぎのエネルギーではなく、波の作用の総量;

$$S = \sum_n \mu_n + \int_{\sigma} \mu(\omega) d\omega$$

が保存する、すなわち**断熱不変量**であることを示した[Hirota & Tokuda, Phys. Plasmas, **17**, 082109 (2010)]. よって、波動運動論と同様な「揺らぎと平均場の相互作用」が、マクロスケールの揺らぎである固有モードや連続モードに対しても議論が可能となる。

(2) 巨視的固有モード間の非線形相互作用の定式化

本研究は「平面波でない」巨視的モード間の非線形相互作用を定式化するためには、変分原理(ハミルトンの最小作用の原理)を有効に活用するべきであることに着目した。ただし、プラズマのラグランジアンの変分を取る際には、**プラズマ粒子の軌道**に関して変分をとる必要がある。ちなみに、線形摂動の範囲ではプラズマの微小な変位ベクトル場を考えればよく、すでに理論は確立している。しかし、非線形摂動は有限振幅となるので、非線形変位場  $\Xi$  はもはやベクトル場ではなく、微分同相写像(Lie 群)として扱わなければならない(図2)。

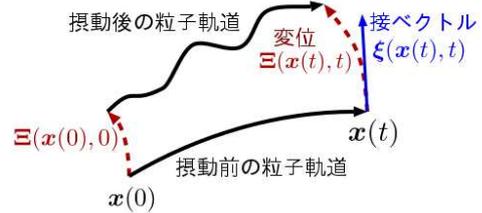


図2. 粒子軌道の非線形変位とそれを生成する接ベクトル場

本研究は変位場  $\Xi$  に対応する接ベクトル場  $\xi$  を導入し、摂動後のラグランジアンを  $\xi$  に関して Lie 摂動展開することにより、三次オーダー以上の非線形項を初めて体系的に導くことに成功した。

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L + L_{\xi} L + \frac{1}{2} L_{\xi} L_{\xi} L + \frac{1}{6} L_{\xi} L_{\xi} L_{\xi} L + \dots \\ &= L + L^{(1)}(\Xi) + L^{(2)}(\Xi, \Xi) + L^{(3)}(\Xi, \Xi, \Xi) + \dots \end{aligned}$$

ここで、 $L_{\xi}$  は Lie 微分作用素であり、これがヤコビ恒等式を満たすという性質から、高次オーダーのラグランジアン  $L^{(n)}$  を求める公式が得られる。変分原理を適用すると、 $\Xi$  の運動方程式が導かれる。摂動展開を二次オーダー  $L^{(2)}$  までで打ち切るのが線形摂動理論であるが、三次オーダー  $L^{(3)}$  まで考慮すると三波相互作用の効果が加わる。この時、三つの固有モードを  $L^{(3)}$  の引数に代入した値は、それらの間の**相互作用の強さを測る指標(結合係数)**となる[Hirota, J. Plasma Phys., **77**, 589 (2011)].

(3) アルフベン固有モードへの応用

本研究は、具体的に磁気流体(MHD)方程式の場合に対して三次のラグランジアン  $L^{(3)}$  を導出し、アルフベン固有振動の間の相互作用を評価した[Hirota & Aiba,

Nuclear Fusion, **51**, 073037 (2011)]. ちなみに背景場が一樣な場合、三つのアルフベン平面波は三波相互作用せず ( $L^{(3)} = 0$ )、磁気音波が介在して初めて相互作用が起きることで知られる。これに対し本研究は、背景場が強い非一樣性をもつときに、巨視的なアルフベン固有振動が互いに相互作用をすることを初めて示した。これはアルフベン波が本来圧縮運動を伴わない純粋な横波であったのに対して、非一樣プラズマのアルフベン固有振動は、背景場の歪みによって圧縮運動 ( $\nabla \cdot \xi \neq 0$ ) つまり音波の成分を少なからず含むためである。

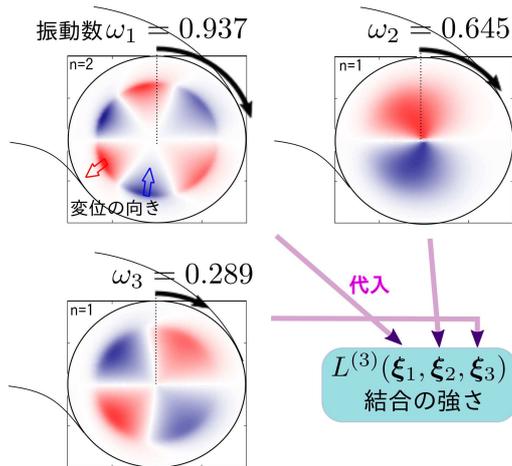


図3. トーラスプラズマにおける三つの巨視的なアルフベン固有振動の例

トーラス型プラズマ閉じ込め装置において存在する三つのアルフベン固有モードの例を図3に示す。これらは線形安定性解析コード MINERVA によって計算した固有関数の半径方向変位を可視化したものである(青色の部分は外向き、赤色の部分は内向きの変位)。振動数  $\omega$  とトロイダル方向の波数  $n$  もそれぞれ付記している。この三つのモードは共鳴条件 ( $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ ) をほぼ満たしており、比較的強い結合が起こることがわかる。

磁場で閉じ込められたプラズマは中心部で圧力が高く、また、真空容器もトーラス形状に曲がっているため、図3のモードは平面波とはかけ離れた固有関数である。プラズマの中心圧力を上げたり、トーラスの曲率を増やしたりするほど、非一樣性は強くなり、アルフベン固有モード間の結合も強くなる傾向を明らかにした。

結合がより強いほど、より小さい振幅で相互作用(エネルギーカスケード)が起こるため、モードの振幅は低いレベルで抑制される。図3の例において結合係数を計算すると、磁場揺動が背景磁場に比べておよそ  $10^{-4}$  程度になるとモード間の相互作用が起きるとい

結果になった。つまり、それ以上の振幅に達することは(いわゆるパラメトリック減衰が起こるため)ありえないことがわかる。

このように、本研究で見出したラグランジアン Lie 摂動展開法により、さまざまな巨視的不安定性に対して、モード間相互作用に起因する非線形飽和や二次的不安定性の発生などを解析的・数値的に予測可能になった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① M. Hirota, P. J. Morrison, Y. Ishii, M. Yagi and N. Aiba, "Nonlinear variational method for predicting fast collisionless magnetic reconnection", Nuclear Fusion, **53**, 063024 (2013) 査読有  
doi:10.1088/0029-5515/51/7/073012
- ② N. Aiba, M. Furukawa, M. Hirota, N. Oyama, A. Kojima, S. Tokuda and M. Yagi, "Mechanisms of plasma rotation on the type-I edge-localized mode in tokamaks", Nuclear Fusion, **51**, 073012 (2011) 査読有  
DOI:10.1088/0029-5515/51/7/073012
- ③ M. Hirota and N. Aiba, "Significant effect of plasma compressibility on nonlinear mode coupling of Alfvén eigenmodes", Nuclear Fusion, **51**, 073037 (2011) 査読有  
DOI:10.1088/0029-5515/51/7/073037
- ④ M. Hirota, "Variational formulation for weakly nonlinear perturbations of ideal magnetohydrodynamics", Journal of Plasma Physics, **77**, 589-615 (2011) 査読有  
DOI:10.1017/S0022377810000760
- ⑤ N. Aiba, M. Furukawa, M. Hirota and S. Tokuda, "Destabilization mechanism of edge localized MHD mode by a toroidal rotation in tokamaks", Nuclear Fusion, **50**, 045002 (2010) 査読有  
DOI:10.1088/0029-5515/50/4/045002
- ⑥ Y. Fukumoto, M. Hirota and Y. Mie, "Lagrangian approach to weakly nonlinear stability of elliptical flow", Physica Scripta, **T142**, 014049 (2010) 査読有  
DOI:10.1088/0031-8949/2010/T142/014049
- ⑦ M. Hirota and S. Tokuda, "Wave-action conservation law for eigenmodes and

*continuum modes*", Physics of Plasmas, **17**, 082109 (2010) 査読有  
DOI:10.1063/1.3475793

- ⑧ M. Hirota, "Action-angle representation of waves and instabilities in flowing plasmas", Journal of Plasma Fusion Research Series, **9**, 463-470 (2010) 査読有  
[http://www.jspf.or.jp/JPFRRS/index\\_vol9-4.html](http://www.jspf.or.jp/JPFRRS/index_vol9-4.html)

[学会発表] (計 9 件)

- ① 廣田真, P. J. Morrison, 石井康友、矢木雅敏、相羽信行 “無衝突磁気リコネクションの加速機構における電子温度効果の役割”, 日本物理学会第68 回年次大会(2013 年3 月26 日 広島県東広島 広島大学).
- ② M. Hirota, "Lagrangian approach to weakly and strongly nonlinear stability analyses of fluid models", BIRS Workshop on *Spectral Analysis, Stability and Bifurcation in Modern Nonlinear Physical Systems*, Banff International Research Station (Banff, Canada, 4-9 November 2012).
- ③ M. Hirota, P. J. Morrison, Y. Ishii, M. Yagi and N. Aiba, "Nonlinear acceleration mechanism of collisionless magnetic reconnection", 24th IAEA Fusion Energy Conference, Hilton San Diego Bayfront Hotel (San Diego, USA, 8-13 October 2012).
- ④ M. Hirota, P. J. Morrison, Y. Ishii, M. Yagi, N. Aiba, "Variational method for estimating nonlinear acceleration of collisionless magnetic reconnection", IUTAM Symposium on Topological Fluid Dynamics, Isaac Newton Institute (Cambridge, 23-27 July 2012).
- ⑤ 廣田真, P. J. Morrison, 石井康友、矢木雅敏 “エネルギー原理を用いた無衝突磁気リコネクションの非線形解析”, 日本物理学会第67 回年次大会(2012 年3 月24 日 兵庫県西宮市 関西学院大学).
- ⑥ 廣田真 “流れをもつプラズマの連続スペクトルに対する作用・角変数理論”(若手奨励賞受賞記念講演) Plasma Conference 2011 (2011 年11 月22 日石川県金沢市 石川県立音楽堂).
- ⑦ M. Hirota and P. J. Morrison, "Variational approach to collisionless magnetic reconnection", 53rd Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, Salt Palace

Convention Center (Salt Lake City, USA, 14-18 November 2011).

- ⑧ M. Hirota and N. Aiba, "Weakly nonlinear analysis of Alfvén eigenmodes", 20th International Toki Conference (Toki, Japan, 7 - 10 December 2010).
- ⑨ M. Hirota, "Lagrangian approach to resonant three-mode interaction in magnetohydrodynamics", 23rd IAEA Fusion Energy Conference, Daejeon Convention Center (Daejeon, South Korea, 11-16 October 2010).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

廣田 真 (HIROTA MAKOTO)

独立行政法人日本原子力研究開発機構・

核融合研究開発部門・任期付研究員

研究者番号：40432900