

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月31日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22760303

研究課題名（和文） 超関数の概念を用いた減衰正弦波の周波数推定と  
その応用に関する研究研究課題名（英文） Study on Frequency Estimation of a Damped Sinusoidal Signal  
Based on the Notion of Distribution and its Application

研究代表者

新田 益大（NITTA MASUHIRO）

東京理科大学・工学部・助教

研究者番号：20453821

研究成果の概要（和文）：産業の発展に伴い高速かつ高精度な周波数推定法への期待が高まっている。周波数は信号の2階微分によって計算することができるが、信号は雑音を含むので微分可能でない。本研究では信号を超関数と見なして定式化することで、信号の微分を用いない周波数推定法を導いた。その際、実装を考慮して無限時間の積分を有限時間の数値積分で近似したため推定誤差が生じる。そのため誤差解析を行い、所定の誤差範囲での推定を達成するための条件を明らかにした。提案手法の有効性は数値例および実験によって確認した。

研究成果の概要（英文）：Due to industrial growth, there is a demand for rapid and highly accurate frequency estimator. In this study, the author proposes a frequency estimator based on the notion of distribution theory. The author formulates the signal generator in the form of distribution and then derives a frequency estimation algorithm without differential operation. However, an approximation error is generated by considering the computer implementation. Performing error analyses, the author leads to an estimation condition that satisfies the predetermined error range. Effectiveness of the proposed frequency estimator is confirmed by numerical simulations and experiments.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学・計測工学

キーワード：信号処理，周波数推定，超関数

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 世の中には様々な振動現象が存在する。振動現象の最も簡単なモデルは質量-バネ系であろう。質量  $m$  [kg] の物体がバネ定数  $k$  [N/m] のバネに接続されているとき、質点の変位  $x$  [m] は運動方程式  $m\ddot{x} + kx = 0$  に従うから角周波数  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  [rad/s] の正弦

波  $x(t) = X_0 \cos(\omega_n t - \theta)$  となる。つまり振動は単振動であるから、質点は永遠に振動し続ける。

(2) ところが実環境でこの系の振動を観測すると、振動の振幅は次第に減衰していき、やがて釣り合いの位置で静止する。これは、

空気の粘性摩擦やバネを構成する分子の摩擦などでエネルギーが散逸するためであり、振動が  $x(t) = X_0 \exp(-\lambda t) \cos(\omega_d t - \theta)$  という減衰正弦波で表されるからである。したがって振動現象を正確に解析するには、角周波数  $\omega_d$  のみならず減衰率  $\lambda$  も考慮に入れる必要があり、高精度にこれらを推定する手法があれば望ましい。しかしながら減衰を伴う場合、信号を観測できる時間に限りがあるから、高速に推定できることが要求される。

## 2. 研究の目的

(1) 周波数解析の代表的な手法に高速フーリエ変換が挙げられるが、周波数分解能を向上させるには多量のデータが必要となる。これに対して拡張カルマンフィルタを用いた方法は収束が早い推定精度の面で問題があるし、適応ノッチフィルタを用いた方法は精度の良い推定結果が得られるものの、収束に時間がかかるという問題がある。つまり、これらの方法は、高速高精度な推定という要求に応えることができない。

(2) このように従来の周波数推定法は、精度良く推定するには長時間の観測が必要であったり、複雑な演算を必要とするので実時間処理の面で問題があったりするなど、実環境への適用は困難である。そこで本研究では簡単な演算で高速高精度に周波数を推定する手法を開発する。特に実用的なアルゴリズムを求めることを目的とし、マイクロコントローラなどを用いてデジタル実装できるようなものの開発を目指す。

## 3. 研究の方法

(1) 正弦波  $x(t) = X_0 \cos(\omega_n t - \theta)$  を生成するモデルは

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

という2階の微分方程式であり、これを信号発生器という。この恒等式より

$$\omega_n^2 = -\frac{\ddot{x}(t)}{x(t)} \quad (2)$$

として、時々刻々と信号の微分を計算できれば周波数  $\omega_n^2$  を推定することができる。ところがセンサで観測した信号  $x(t)$  には雑音が重畳するため、滑らかではなく、微分を計算することができない。そのため(2)式に基づいて周波数推定を行うことはできない。この微分可能性に起因する問題を解決するために超関数の性質を利用する。

(2) ①つぎの線形汎関数を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (3)$$

ここで  $\phi(t)$  はコンパクトな台を持つ  $C^\infty$  級関数、すなわち

$$\frac{d^n \phi(t)}{dt^n} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm\infty) \quad (4)$$

を満たすとき、 $f(t)$  を超関数、 $\phi(t)$  をテスト関数という。

②テスト関数の性質を超関数  $f(t)$  の微分の際に応用すると、部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \phi(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} dt \quad (5)$$

という重要な方程式を得る。この式は超関数  $f(t)$  の微分はテスト関数  $\phi(t)$  の微分に置換可能であることを示しており、微分可能でない関数の微分も超関数の意味で扱うことができることを意味している。

(3) ①ところで(1)式は恒等式だから任意関数  $\phi(t)$  を掛けても等式は成立し

$$\ddot{x}(t)\phi(t) + \omega_n^2 x(t)\phi(t) = 0 \quad (6)$$

を得る。これを区間  $(-\infty, \infty)$  で積分しても

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t)\phi(t)dt + \omega_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt = 0 \quad (7)$$

が成立する。

②ここで観測信号  $x(t)$  を超関数と見なし、また  $\phi(t)$  をテスト関数とすれば、(5)式の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ddot{\phi}(t)dt + \omega_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt = 0 \quad (8)$$

という恒等式が成立し、これより

$$\omega_n^2 = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ddot{\phi}(t)dt / \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt \quad (9)$$

として信号の微分を一切用いることなく、簡単な積分演算のみで周波数を推定することが可能となる。

(4) 観測信号  $x(t)$  が雑音を含む正弦波であるとき、テスト関数  $\phi(t)$  が定まれば(9)式により周波数を推定することができる。本研究では  $\phi(t)$  として正規分布の確率密度関数であるつぎのガウス関数を採用する。

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

ここで  $\mu$  は平均、 $\sigma$  は標準偏差である。

(5) このようにして(9)式の周波数推定法が完成するが、同式の積分区間は  $(-\infty, \infty)$  であるから無限の観測を要し、実用的でない。そこで  $T$  [s] の観測から周波数を推定する手法を導く。これは積分を有限区間  $[0, T]$  に置き換えることに相当し、このような近似を導入したときに推定精度を保証するガウス関数

のパラメータ  $\mu$ ,  $\sigma$  を決定することが本研究の主たる課題となる。

#### 4. 研究成果

(1) ガウス関数はその定義から  $\phi(t + \mu)$  に関して偶関数となることは容易にわかる。そこで

$$T = 2\mu \quad (11)$$

と選べば  $\phi(0) = \phi(T)$  となり、この積分区間の両端の値が 0 と見なせる十分に小さくなる  $\sigma$  が存在する。このとき無限区間の積分を有限区間の積分で近似することができる。

(2) ①そこで積分を  $[0, T]$  で近似したときの誤差を求めると

$$E = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \sqrt{\mu^2 + (\sigma^2\omega)^2} \times \cos(\omega\mu - \theta) \cos(\omega\mu - \psi) \quad (12)$$

となる。ここで簡単のために絶対値で評価すると誤差に関するつぎの評価関数を得る。

$$I = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \sqrt{\mu^2 + (\sigma^2\omega)^2} \quad (13)$$

したがって  $I$  が十分に 0 と見なせる  $\sigma$  を探索すれば良いことがわかる。

②そのような  $\sigma$  を求めるために  $\omega = 1$  として精度を保証した数値シミュレーションを行った。その結果を図 1 に示す。同図は  $I$  のレンジを  $[0, 1]$  としたものであるが、より詳細に評価するために  $I$  のレンジを  $[0, 10^{-10}]$  の範囲で拡大したものを図 2 に示す。

③図 2 より  $I$  が  $10^{-10}$  以上と以下とに分ける稜線の存在が確認できる。これを明確に調べるために上面図を図 3 に描いた。原点を通る直線であると仮定すると  $\mu > 7.23492\sigma$  という関係を得る。

④さらに周波数  $\omega$  を可変させて調査したところ

$$\mu > 8\sigma \quad (15)$$

と近似して良いことがわかった。

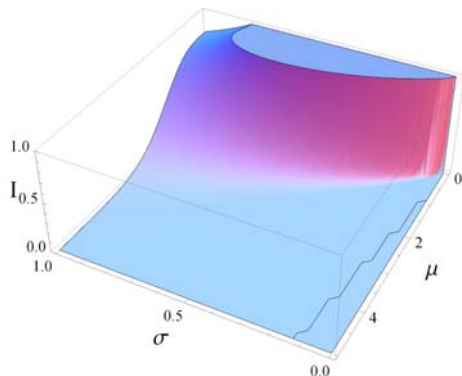


図 1 評価関数の概形

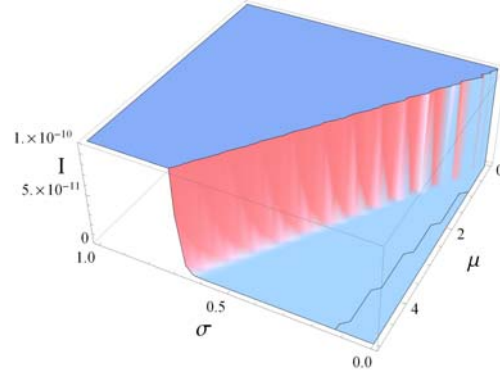


図 2 評価関数の拡大図

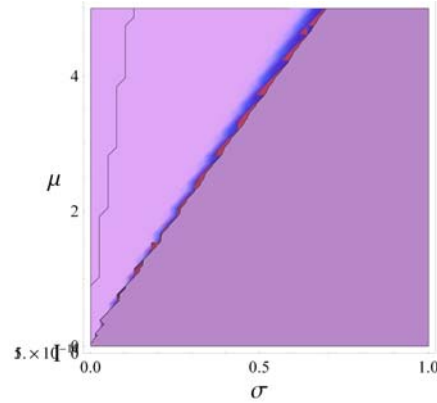


図 3 図 2 の上面図

(3) ①以上の開発で (9) 式の積分を  $[0, T]$  で近似するためのテスト関数  $\phi(t)$  のパラメータ  $\mu$ ,  $\sigma$  の条件が明らかとなり、周波数は

$$\omega_n^2 = -\int_0^{2\mu} x(t)\ddot{\phi}(t)dt / \int_0^{2\mu} x(t)\phi(t)dt \quad (16)$$

で推定することが可能となった。言い換えれば  $T$  [s] の観測毎に上式で周波数を刻々と推定できることを意味する。しかし積分はアナログ演算であるためコンピュータ上にデジタル実装することはできず、積分を数値積分に置き換えなければならない。そこで信号  $x(t)$  がサンプリング周期  $Ts$  [s] でサンプルされるとして数値積分を行う。このときの数値積分法として区間求積法を用いるとすれば、関数  $f(t)$  の区間幅  $Ts$  での積分の近似は

$$\int_0^T f(t)dt = \sum_{k=0}^N f(kTs)Ts \quad (17)$$

として総和演算で表すことができる。

②そこで数値積分による誤差を次式の評価関数で厳密に評価することにする。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt - \sum_{k=0}^N x(kTs)\phi(kTs)Ts \quad (18)$$

先ほどと同様に  $\omega = 1$  としてシミュレーションした結果を図 4 に示す。この図からも同様

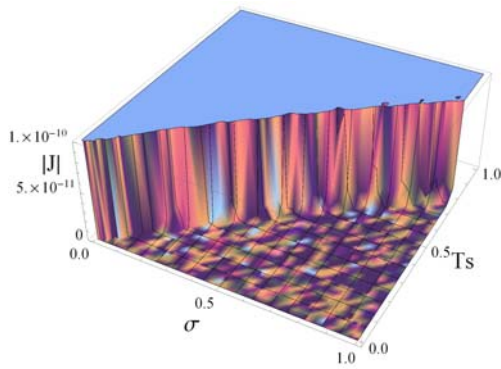


図4 数値積分による誤差

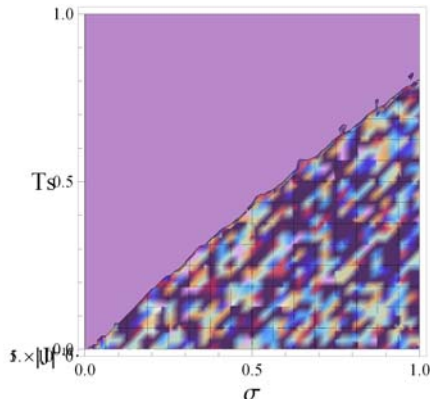


図5 図4の上面図

に稜線の存在が確認できるので、それを明確にするために上面図を図5よりに描いた。この図から原点を通る直線として近似すると

$$Ts < 0.8\sigma \quad (19)$$

という関係を得る。

③これと(15)式の関係より

$$Ts < 0.1\mu \quad (20)$$

という関係が得られ、 $\mu$ を設計パラメータとすれば、上式で推定精度を保証できるサンプリング周期の上限を決定できることがわかった。これは推定精度を上げるために不必要に短いサンプリング周期を選ぶ必要がないことを意味している。以上のことからつぎの周波数推定器を得る。

$$\omega_n^2 = - \frac{\sum_{k=0}^N x(kTs)\ddot{\phi}(kTs)}{\sum_{k=0}^N x(kTs)\phi(kTs)} \quad (21)$$

(4) ①ここで(21)式の周波数推定器を注意深く観察すると観測信号を $x(kTs)$ とすると、分子はフィルタ係数が $\ddot{\phi}(kTs)$ 、分母はフィルタ係数が $\phi(kTs)$ のFIRフィルタとなっていることがわかる。したがってこれらの値を事前に計算しておけば、時々刻々と観測される信号 $x(kTs)$ の周波数をリアルタイムで推定することが可能である。これはすなわち、本研究では(20)式でサンプリング周期の

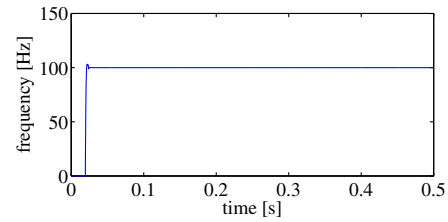


図6 正弦波の推定結果

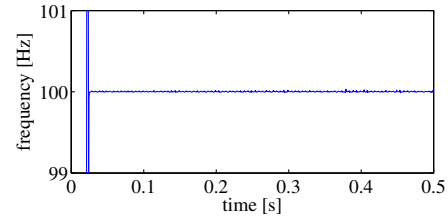


図7 真値付近の拡大

上限が与えられるため高速高精度な周波数の推定を達成していることを意味する。

②そこでエヌエフ回路設計ブロック製マルチファンクションジェネレータ WF1973 から発生させた 100[Hz]の正弦波を National Instruments製24ビットアナログ入力モジュール NI 9239 を用いて MATLAB 上で計測し、得られた波形に対して提案した周波数推定器を用いて周波数を推定するという実証実験を行った。

③推定結果を図6に、また真値付近を拡大したものを図7に示す。これらの図から高速高精度に周波数を推定していることが確認できる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計2件)

① 新田益大, 超関数に基づく高精度周波数推定, 第12回 計測自動制御学会 制御部門大会, 2012/3/15, 奈良県文化会館.

② Asami Ishizaka, Error Analysis on Distribution-based Frequency Estimator, International Conference on Control, Automation and Systems 2010, 2010/10/28, KINTEX, Korea.

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

新田 益大 (NITTA MASUHIRO)  
東京理科大学・工学部・助教  
研究者番号：20453821