

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月31日現在

機関番号：37401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22800076

研究課題名（和文）

確率的ネットワークの性能解析を行うための効率的なアルゴリズム

研究課題名（英文）

A research about efficient algorithms for analyzing the networks with random weights

研究代表者

安藤 映 (ANDO EI)

崇城大学・情報学部・助教

研究者番号：20583511

研究成果の概要（和文）：

本研究は、要素が網の目状に繋がったネットワーク（電力網・通信網・道路地図など）を抽象化した離散グラフの上で、状況が確率的に変化する場合の最適解（地図上の最短距離など）の変化の仕方（重み合計の確率分布）を求める方法を調べたものである。本研究期間中は、計算機ネットワークの1つの地点から出された情報がネットワーク全体に広がるまでに掛かる時間および、2地点間の最短移動時間の確率分布を計算する方法を研究した。この結果、グラフの木幅と呼ばれるパラメータが小さなグラフに関して、上述の2つの問題の確率分布の計算が効率的に完了可能である事を証明し、発表を行った。

研究成果の概要（英文）：

This research is about computing the probability distribution function of the optimal solution in graphs, which represents network of roads, electric power, computer communication and so on. This study especially focuses on the cases in which the situation changes from time to time like the traffic jams. In the study duration, the following fact was revealed. The probabilistic distribution functions of the stochastic broadcast time and the stochastic shortest time can be computed efficiently if a parameter, treewidth, of a given graph is small.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,050,000	315,000	1,365,000
2011年度	1,050,000	315,000	1,365,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：情報学基礎

キーワード：グラフ最適化問題，ブロードキャスト時間，確率的な通信時間，確率分布計算，確率的な枝長さ，最短路問題

1. 研究開始当初の背景

道路網上における自動車での物資の輸送時間・論理回路におけるゲート遅延ばらつきが全体の信号遅延ばらつきに及ぼす影響・アドホック計算機ネットワークにおける通信

時間などはそれぞれの理由によって確実な情報を得ることが難しく、その不確実な部分を確率的な数理モデルで表現する。これらの個々の問題はそれぞれの特有の要素（自動車の加速特性・半導体チップの製造過程・ソフ

トウェア振る舞いなど)が存在するものの、それらを捨象した数理的モデルを考えると、先述の問題は全てネットワーク上での確率的な現象と見ることができ、こうした確率的な現象の解析自体は、たとえば論理回路の製造歩留まりを調べるために重要であり、古くから研究されていた。しかし、特に効率的な解析の可能性については深く理解されていなかった。

2. 研究の目的

確率的なネットワークの振る舞いを解析する効率的なアルゴリズムの設計のための指針を理論として構築することを目的とした。

3. 研究の方法

確率的なネットワークの解析を行うアルゴリズムの設計理論という全体構想のうち、本研究では確率的な通信時間を持つネットワークモデル上でのメッセージの流通を解析する問題に絞って研究を行った。平成22年度内は一種類のメッセージが確率的な通信時間を持つ通信路を通してネットワーク全体に伝わるまでの時間(ブロードキャスト時間)を計算するアルゴリズムの設計に注力した。次に平成23年度には、より詳細にメッセージの流れ方を解析し、確率的に変化する枝長さを持つグラフにおける二点間最短路の長さの計算方法を研究した。申請者は九州大学の山下雅史教授・小野廣隆助教およびサイモンフレイザー大学(カナダ)のジョセフ・ピーターズ教授とのディスカッション等を実施しながら研究を行った。

4. 研究成果

(1) 研究の主な成果

本項目では、説明に必要なモデルの定義を示した後、研究成果として得られた定理、重要な補題について記述する。

本研究で具体的に対象としたモデルは以下の通りである。頂点集合 V と(無向)枝集合 E からなるグラフ $G=(V,E)$ に関して、各枝 e に確率変数の重み X_e がつけられている場合を考える。ただし、各枝の重み X_e は互いに独立であるとする。このとき、グラフ G 上でのブロードキャスト時間とは、 G の頂点とプロセッサ、枝と通信路が対応する計算機ネットワークにおいて、単一の情報源から1つのメッセージが発信され、全体に伝えられるまでの時間である。ここで、枝重みが確率変数であるためにブロードキャスト時間も確率変数である点に注意し、ブロードキャスト時間の振る舞いはブロードキャスト時間の確率分布関数で与えられる事に注意する。

以下の①②③では次のような考えに基づいたアルゴリズムを提案した。本研究で提案したアルゴリズムに共通する方法として、問

題インスタンスとして与えられたグラフから、一度枝重みを全て取り払い、計算の出発点としての計算式をたてる事を行う。この計算式をたてた後、枝重みの分布関数とのたたみ込み積分を繰り返し計算し、全ての枝重みに関する計算が完了した時点で目的の確率分布関数が得られるようにアルゴリズムを設計した。

① 指数分布に従う枝重みの場合のブロードキャスト時間について

上述の問題設定で研究を行い、まず、枝重みが全て互いに独立な指数分布で与えられる場合についてブロードキャスト時間の分布関数を正確に計算するアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは一般のグラフ G に対してグラフ規模の指数に比例するような処理時間が掛かる可能性があるものの、グラフの形状を表すある種のパラメータがグラフ規模に対して小さい(定数として与えられる)場合にはグラフ規模の多項式時間で計算を完了できる。

この結果は学会発表④および⑤で発表した。なお、この発表内容と、次に示す最短路問題に関する結果と合わせてまもなく論文誌に投稿予定である。

② 指数分布に従う枝長さをもつ無向グラフにおける二点間最短路長さの分布関数について

ブロードキャスト時間の計算と最短路長さの計算の間にはよく似た構造があり、最短路長さの分布関数計算にもその構造の特徴が利用できる事が判った。

本研究では、二点間の最短路長さの分布関数を正確に計算するアルゴリズムを提案した。先と同様に、このアルゴリズムは一般のグラフ G に関してグラフ規模の指数に比例する時間を必要とする可能性がある。しかし、グラフの本幅と呼ばれるパラメータがグラフ規模に対して小さい(定数として与えられる)場合には多項式時間で完了する事ができる。

この成果は学会発表①および③で発表を行ったほか、成果①と合わせて論文誌に投稿する予定である。

③ 指数分布以外の分布に従う枝長さを持つ無向グラフにおける最短路長さの分布関数・ブロードキャスト時間の計算について

上述の成果は全て指数分布に従う枝重みを仮定した場合だったが、相互の独立性のほか確率分布の3つの条件を満たしていれば任意の確率分布に従う枝重みを持つ場合で、最短路長さおよびブロードキャスト時間の分布関数を近似計算するアルゴリズムを示した。この近似アルゴリズムは成果①②と同

様に、木幅および最大頂点次数が定数であるようなグラフについてグラフ規模と分布関数の引数 x および許容誤差 ϵ の逆数の多項式時間で完了する事を証明した。

この成果は学会発表②で発表を行ったほか、論文誌への投稿準備中である。

④アルゴリズムの正しさ証明に関するアイデアについて

ブロードキャスト時間の確率分布を求める方法についてより具体的に解説を行う。アルゴリズムの正しさの証明の骨子は、次の二つの分布関数が等しい事を示すことである。証明のために、(実際に計算するわけではないが)全ての最短路木を列挙して、各最短路木 T について a. その最短路木 T が実現される確率と、 b. 最短路木 T が実現された条件の下でブロードキャスト時間が x 以下である確率を求め、 a. b. の積の和を取ったものを考えて A と呼ぶ事にする。 A は明らかにブロードキャスト時間の分布関数である。 それに対し、計算の出発点としてたてた式に、枝重みの分布関数の積分を繰り返した後に得られる関数がアルゴリズムの出力であり、これを B とする。 このとき、証明においては上述の A と B が等しい事を示し、アルゴリズムの出力の正しさを証明した。

なお、二点間の最短路長さの確率分布を求めるアルゴリズムに関してもよく似た方法で正しさの証明を行う事ができる。

⑤アルゴリズムの高速化に関するアイデアについて

前述の内容だけでは、全ての最短路木 T を列挙して得られるブロードキャスト時間分布関数 A を直接計算すれば良いようにも見えるが、この方法では一般にごく限定的なグラフクラスに対しても大きな計算量を必要とする。本研究の提案アルゴリズムでは、次に述べる工夫を入れる事で、できる限り計算量を小さく抑えている。

提案アルゴリズムを高速化するアイデアは、最短路木 T が実現し、かつブロードキャスト時間または最短路長さが x 以下である確率を、全ての T について和を取ったものを数式で表現し、この数式表現を出来るだけ短くする点である。

まず、全ての頂点 $v \in V$ と枝 $e \in E$ の組 (v, e_1) について一つずつ変数 x_{ve1} を考える。このとき、頂点 v に最初にブロードキャストメッセージが枝 e から届く場合について考える。 v に繋がる他の枝を $e_2, e_3, \dots, e_{d(v)}$ とするとブロードキャスト源でない頂点 v に関して、 v が時刻 x_{ve1} にメッセージを受け取り、直ちに隣接する頂点へ向けて時刻 $x_{ve2}, \dots, x_{ved(v)}$ にメッセージの送信を開始する場合、その確率はステップ関数 $H(x)$ を用いて

$$\prod_{i=2, \dots, d(v)} H(x_{vei} - x_{ve1})$$

と表現できる。ここで、 $d(v)$ は頂点 v の次数、ステップ関数 $H(x)$ は $x \leq 0$ で $H(x) = 0$ 、 $x > 0$ で $H(x) = 1$ を満たす関数である。加えて、 $H(x - x_{ve1})$ との積を取ると、頂点 v が時刻 x より前にブロードキャストメッセージを受け取らなければ式の値が0となり、「頂点 v が時刻 x までにブロードキャストメッセージを受け取る」という条件が表現できる。そして v に繋がる全ての枝 $e_2, \dots, e_{d(v)}$ のそれぞれからメッセージを v が受け取る場合についても同様に式を立て、和を取る。すると、 x と $x_{ve1}, \dots, x_{ved(v)}$ の値を定めればこの関数は0又は1の値をとり、 x および $x_{ve1}, \dots, x_{ved(v)}$ で示されたメッセージの送受信のタイミングが v の周囲で可能であれば1、あり得ないタイミングであれば0という関数となる。さらに、この関数を全ての頂点 $v \in V$ について立てて積を取ると、全ての頂点の周辺であり得るメッセージの流れ全てをステップ関数で表現した式となり、この式を分布関数の計算を行うための出発点として用いる。

上記で説明した式が全ての最短路木が実現される場合の表現を含む事は、式を全て展開する事で理解出来る。ただし、実際には多少の余分なケース(各頂点だけの視点からは区別出来ないような、あり得ないメッセージの流れ、メッセージの流れがループする場合など)を含むが、そのような場合と対応する項が計算に及ぼす影響を排除するためにさらにもう一段階の工夫を行っている。

本研究のアルゴリズムで重要な部分は、上述の式によって、全ての最短路木を列挙する処理の中で、複数の最短路木に共通する処理をうまくまとめ上げ、木幅が小さなグラフに関して高速化を行うことができた。なお、上記ではブロードキャスト時間の確率分布を求める方法について解説しているが、最短路の長さの確率分布を求める際にも同様の手法を用いる事ができる。

⑥木幅が小さなグラフに関して効率的に計算完了することの証明アイデア

木幅の小さなグラフに対して提案アルゴリズムが効率的に計算完了することについては以下の方法で証明を作成した。前述の計算式から出発して、積分計算に必要な部分だけを展開し、積分を実行すると、ちょうど一つのカッコで括られた因数一つに含まれる変数が、グラフの中で既に計算済みの枝で出来る連結成分に含まれる頂点と対応する。この事実を利用し、木幅が小さなグラフにおいては、ブロードキャスト源から遠くにある枝から処理を行う事で、途中計算式に含まれる変数の数が小さい事が言える。こうして、途中計算式の長さを抑える事で計算時間の証明を行った。

(2)得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

本研究の成果の特徴は、正確な分布関数の値を繰り返すか、任意に小さな許容誤差 ϵ を指定して動作するアルゴリズムを与えた点である。本研究のアルゴリズムは特に、問題として与えられた枝重みの分布関数を積分する事を繰り返して計算対象（ブロードキャスト時間・最短路長さ）の分布関数を求める点で、類似の研究を1960年代頃の文献にも見つける事が出来る古いアプローチである。それにも関わらず、研究代表者の知る限り、既存の類似研究では積分計算自体の繰り返し回数がグラフ規模の指数回程度発生する手法しか存在していなかった。本研究の意義は積分を繰り返して目的の分布関数を計算する素朴なアプローチにもまだ工夫の余地が十分にある事を示した点にある。また、他のグラフ最適化問題に確率変数の重み付けをした場合にも同様のアプローチの可能性を示した。

(3)今後の展望

本研究の成果として得られた研究結果はまもなく論文誌に投稿する予定である。本研究から引き続き考えられる今後の課題は、少なくとも二つ挙げられる。

一つは、他の組み合わせ最適化問題に関して互いに独立な確率変数の重み付けを考えた場合に、最適解の重み合計を求める手法が求められる可能性である。たとえば枝重みが互いに独立な確率変数で与えられる無向グラフにおいて、最小全域木の重みの分布関数を求める手法は、本研究で得られたアルゴリズムよりもある程度複雑になると考えられるが、同様のアプローチによって木幅が小さなグラフに関しては効率的に計算が完了できる可能性を示しうる。

もう一つの方向性は、より高速な近似アルゴリズムへの適用可能性である。本研究でカバーしきれなかった部分として、木幅が大きなグラフについて高速に計算を完了する手法が望ましい。一方で、木幅の大きいグラフは問題の難しさの核と考えられるため、こうした問題に対して厳密計算アルゴリズムの設計を試みるのは無謀である。より現実的なアプローチとして、木幅の大きなグラフをいったん木幅の小さなグラフに変形して、近似計算を試みるアプローチを考える事ができる。特に、閉路の無い有向グラフ (Directed Acyclic Graph, DAG) の最長路問題において確率的な枝重みを考慮する事は、論理回路の遅延解析の面から産業界において大きな需要がある。この問題に対して最初に試みうるアプローチは、閉路の無いトーナメント状グラフと閉路の無い有向 2-tree において指数分布に従う枝重みを仮定した場合に最長路

長さの分布関数がどのように変化するかを調べることで次の成果に繋がる可能性が考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 6 件)

①. E. Ando and J. Peters. Computing the Stochastic Shortest Path Length Between Two Vertices with Exponentially Distributed Edge Lengths in Graph with Small Treewidth. IEICE Technical Report COMP2011-50, Mar, 2012, 23–29.

②. E. Ando and J. Peters. Approximating the Stochastic Shortest Path Length Between Two Vertices. アルゴリズム研究会, Vol. 2012-AL-138(8), 流通科学大学, 2012年1月28日.

③. E. Ando and J. Peters. Computing the Shortest Path Length Distribution Between Two Vertices in Graphs with Random Edge Lengths. 2011年度LAシンポジウム, 静岡県西海市, 2011年7月21日, 18-1–18-8.

④. E. Ando and J. Peters. Computing the Broadcast Time Distribution Function in Networks with Stochastic Transmission Time. 4th Annual Meeting of the Asian Association for Algorithms and Computation (AAAC 2011), Hsinchu, Taiwan, 2011年4月11日.

⑤. E. Ando and J. Peters. An Algorithm for Computing the Broadcast Time in Networks with Stochastic Transmission Time. アルゴリズム研究会, Vol. 2011-AL-134(16), 琉球大学, 2011年3月7日.

⑥. E. Ando and J. Peters. Computing the Broadcast Time in Networks with Stochastic Transmission Time, アルゴリズム研究会, Vol. 2010-AL-131(3), 2010年9月22日.

6. 研究組織

(1)研究代表者

安藤 映 (ANDO EI)

崇城大学・情報学部・助教

研究者番号：20583511

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし