

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 1日現在

機関番号：13601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22830035

研究課題名（和文） 数学的探究における操作的証明活動を促進する教材群の開発

研究課題名（英文） Development of teaching materials for facilitating students' action proof in mathematical inquiry

研究代表者

小松 孝太郎 (KOMATSU KOTARO)

信州大学・教育学部・准教授

研究者番号：40578267

研究成果の概要（和文）：

本研究は、証明の学習状況を改善するために、数学的探究において「操作的証明」(action proof)を活用する活動に着目し、その児童・生徒の活動を促進する方法を明らかにしようとするものである。本研究では、数学教育学の文献解釈、題材の数学的な分析、そして小学五年生及び中学三年生を対象とした教授実験の実施とその分析から、児童・生徒の活動を促進する教材を開発するための指針を得た。

研究成果の概要（英文）：

Proof and proving are at the core of mathematical activities, and therefore should be the center of students' mathematical experiences at all grades. However, mathematics education researches have revealed that many students feel difficulties in learning proof and proving. In order to improve this learning situation, this study focuses on a notion of "action proof", and aims to explore how we can encourage students to utilize action proof in mathematical inquiry. In particular, this study derives some guidelines for developing teaching materials which intend to facilitate students' activities, by examining the existing researches, analyzing materials, and conducting and analyzing teaching-experiments with fifth and ninth graders.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,240,000	372,000	1,612,000
2011年度	1,130,000	339,000	1,469,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,370,000	711,000	3,081,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育

キーワード：数学教育，証明，操作的証明，数学的探究，教材開発

1. 研究開始当初の背景

証明は数学の研究に特徴的な目的かつ方法であり、証明指導が創造的、論理的に考える力の育成に結び付くことから、近年、証明の学習が重要であることは世界的に認知さ

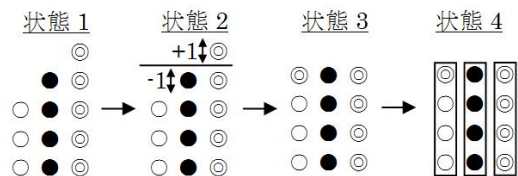
れている。しかし、多くの生徒が証明を記述することができない、証明の必要性を実感していない等、証明の学習状況は我が国に限らず国際的に見ても望ましくない。そして、この学習状況を改善することが、数学教育学研

究において国内及び国際的に重要な課題となっている。

本研究ではこの課題を解決するために以下の二点に着目した。第一は、数学的探究において「操作的証明」(action proof)を活用する活動を、小学校段階に位置付けることである。操作的証明とは簡単に言えば具体物を用いた証明であり(図1),小学生にも学習可能な証明であることが先行研究より明らかとなっている。本研究では、その操作的証明を活用する児童の活動を、数学の研究を反映した数学的探究(事柄の推測,事柄の証明,事柄や証明の論駁,事柄や証明の洗練)に位置付けることを意図した。それにより、「数学の研究を反映した算数学習の実現」と「中学校段階から始まる証明学習の素地形成」が可能になると期待される。

第二は、児童の活動を促進する教材を開発することである。近年、証明学習を促進する方法が研究され、例えば証明の必要性の実感を促す教材の配列が解明されている。それに対して本研究では、数学的探究における操作的証明活動に着目し、その活動を促す教材を開発するための指針を得ることを意図した。その指針を明らかにすることができれば、継続的な指導を行うための教材群を提供することが可能になると期待される。

事柄：連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍になる



3 + 4 + 5において、5のおはじき1個を、3のおはじきの方へ移せば、4を表すおはじきを3組作ることができる。よって、3 + 4 + 5は4の3倍になる。他のすべての場合についても、同様の行為を行うことができる。したがって、この事柄は成り立つ。

図1：操作的証明の例

2. 研究の目的

本研究は、証明の学習状況を改善するために、数学的探究において操作的証明を活用する活動に着目し、その児童・生徒の活動を促進する方法を明らかにしようとするものである。そのために、児童・生徒の活動を促進する教材を開発するための指針を得ることを目的とした。

3. 研究の方法

本研究では、上述の研究目的を達成するために、以下の研究項目を設定した。

- (1) 数学的探究の概念規定を行い、その教育的意義を明らかにすること
- (2) 既存データを教材開発の観点から再分析すること
- (3) 教材開発の指針を導出すること

(1)については、数理哲学及び数学教育学の文献解釈、及び題材の数学的な分析から研究を進めた。(2)については、小学五年生のペア、及び中学三年生のペアを対象とした教授実験を分析の対象とした。(3)については、教授実験の分析に基づく実践的考察と、数学教育学の文献解釈等による理論的考察の両面から研究を行った。

4. 研究成果

(1) 数学的探究とその教育的意義

本研究では、数学の特性を考慮して数学的探究の意味を特徴付けるために、数学の研究を考察の対象としている数理哲学に着目した。とりわけ、操作的証明との理論的整合性を考慮して、ラカトシュの可謬主義に依拠することにした。

まず、ラカトシュの数学観に大きな影響を与えた研究として、ポリヤの発見学及びポパーの反証主義を概観した。そして、可謬主義の基本的立場として、非形式的で準経験的な数学は、疑いの余地のない定理を単調に積み重ねていくことを通じてではなく、思索と批判や証明と論駁によって推測を絶え間なく改良することを通じて成長するという数学観があることを確認した。

次に、数学的探究の概念を規定するにあたって、ラカトシュが定式化している発見法的規則を指標とした。その上で、可謬主義から見た数学的探究の側面として、事柄の推測と証明、証明の論駁と洗練、事柄の論駁と洗練を挙げ、その更なる下位側面を明らかにした。そして、それらの側面を合わせる形で、数学的探究の概念を、「数学的な対象について調べていく中で事柄を推測し、その事柄を証明し、さらに事柄と証明の不確かさを解消することを目指して、その事柄と証明を論駁しながら洗練していく活動」と規定した。

そして、数学的探究の教育的意義について、数学的活動の実現、事柄の条件に対する明示的な意識、証明観の変容の三点から議論した。とりわけ、従来の数学教育の研究では十分に取り上げられてこなかった「演繹的推量による内容の増加」(以下、演繹的推量)に着目し、以下の教育的意義を指摘した。それは、第一に、演繹的推量に子どもが取り組む機会を設けることで、子どもが証明を、事柄の論駁に耐えながらもより一般的な事柄を追究していく力動的な活動として捉えるようになることが期待されることである。そして第

二は、子どもの証明観がそのように変容することが、証明の学習状況を改善することにつながると思われることである。

近年、算数・数学科に限らず広く学校教育において探究型の教育を充実することが目標とされている。本研究の成果は、算数・数学科において、特に説明や証明に関して、そうした探究型の教育がどうあるべきかを方向付ける指針になり得るものである。

(2) 枠組みの構築と教授実験の分析

教材開発の指針を得ることを目的に、中学三年生を対象とした教授実験の結果を分析した。その教授実験では、生徒は当初の推測を証明した後、その推測を論駁する反例に直面した。ところが、その後、その反例をも例として含むより一般的な推測を生成した。その生徒の活動を分析した結果、反例をも例として含むより一般的な推測を生成するためには、例と反例の境界について考察することが重要になることが明らかとなった。そして、学習指導への示唆として、生徒自身による一般化を促進するためには、そうした例と反例の境界について生徒が証明に基づいて考察する機会を、教師が意図的に設けることの重要性を指摘した。

一方、本研究では上述の分析にあたって、ラカトシュの発見法的規則の中でも、補題組み込み法と演繹的推量の二つに着目して、分析枠組みを暫定的に構築した。ラカトシュの研究を利用して児童・生徒の活動を分析する従来の研究では、モンスター排除法、例外排除法、そして補題組み込み法のみ焦点が当てられる傾向にあった。しかし、演繹的推量が枠組みの要素として含まれていなければ、本教授実験における生徒の活動を的確に描写することはできなかった。また、演繹的推量は発見法的規則の一つとして明示的に位置付けられていたことから、ラカトシュはそれを重視していたことがうかがえる。以上のように、分析枠組みの記述性と規範性の両面を考慮すると、演繹的推量を枠組みの要素として加えることが重要になることを本研究は明らかにした。

(3) 教材の構成及び教師の役割

数学的探究における操作的証明活動を促進する学習指導について、教材の構成と教師の役割の二点から議論した。まず、主にこれまでの教授実験で準備した課題と具体物に基づいて、教材開発の指針として以下の三点を明らかにした。第一は、反例や論駁の提起を可能にする課題を設定することにより、事柄や証明を能動的に洗練しようとする動機が生まれるとともに、ラカトシュの可謬主義を反映した学習を実現できるようになると期待されることである。第二は、その際に具体物と他の表現様式との間で対立する結果が生まれる課題を設定することが効果的で

あることである。第三は、具体物に関して、教師が子どもの活動を予想したり子どもの実態を考慮したりした上で、構造の異なる複数の具体物や、新たな事柄の生成を実現するための具体物を適切に準備することが重要になることである。

次に、教師の役割に関しては、これまでの教授実験を通じて明らかにしてきた促進の方法が、実際の授業の場で教師が子どもの活動を促進しようとする際の指針になり得ることをまず指摘した。その上で、さらなる教師の役割として、事柄や証明が成り立つ範囲について学級全体で追究する機会を設定すること、具体物を用いた活動の目的を子どもが明確に自覚できるように配慮すること、具体物だけではなく図も併用するように子どもに求めることの三点を明らかにした。

数学的探究における操作的証明活動を学校数学に取り入れていくことは、数学の研究を反映した学習を実現することにつながる。加えて、そのことは、自ら問題を見つけて解決したり、さらによりよい問題解決や新たな問題を批判的に追究したりしようとする態度を育成することにも結び付くと期待される。しかし、その分、そうした活動は決して子どもにとって容易ではないと思われる。それゆえ、その子どもの活動を我々がいかに促進すべきであるのかということが、学習指導上の大きな問題となる。それに対して、本研究の成果は、教師が実際の学習指導を考案するための指針になり得るものである。

(4) 研究成果の発表

(1) に関しては、まず証明活動の捉えについて、第5回東アジア数学教育国際会議で他の証明研究者と共同発表を行った(Chino, et. al., 2010)。そして、ラカトシュの可謬主義に基づいた研究成果を論文としてまとめ、国内学術誌に投稿した(小松, 2011)。

(2) の研究成果は、第35回国際数学教育心理学会年会論文集に投稿し、同年会で研究発表を行った(Komatsu, 2011)。(3) の研究成果は今後発表の予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. 小松孝太郎 (2011). 「ラカトシュの可謬主義から見た数学的探究とその教育的意義」. 『科学教育研究』(日本科学教育学会), 第35巻第3号, pp. 272-286. (査読有)
2. Komatsu, K. (2011). How do students generalize a conjecture through proving?: The importance of boundary

cases between example and counterexample. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 89-96). Ankara, Turkey. (査読有)

3. 小松孝太郎 (2010). 「数学的探究における action proof の活用の促進：事例研究を通して」. 『日本数学教育学会誌 数学教育学論究』, 第 93 号, pp. 3-29. (査読有)

[学会発表] (計 2 件)

1. Komatsu, K. (2011). How do students generalize a conjecture through proving?: The importance of boundary cases between example and counterexample. *The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2011.7.14, Ankara, Turkey.
2. Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa, T., Miyazaki, M., Mizutani, N., Nakagawa, H., Otsuka, S., & Tsujiyama, Y. (2010). An assessment framework for students' abilities/competencies in proving. *The 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*. 2010.8.21, Tokyo, Japan.

[図書] (計 1 件)

1. 小松孝太郎 (2012). 「数学の学習論・学習者論」. 大高泉・清水美憲 (編著), 『教科教育の理論と授業Ⅱ：数理編 (新教職教育講座シリーズ第 6 巻)』(pp. 71-84). 東京：協同出版.

6. 研究組織

(1)研究代表者

小松 孝太郎 (KOMATSU KOTARO)

信州大学・教育学部・准教授

研究者番号：4 0 5 7 8 2 6 7

(2)研究分担者

(3)連携研究者