

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 11 日現在

機関番号：13601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22840025

研究課題名（和文）複素鏡映群に付随する代数達のモジュラー表現論

研究課題名（英文）Modular representation theory of algebras associated with complex reflection groups

研究代表者

和田 堅太郎 (WADA KENTARO)

信州大学・理学部・助教

研究者番号：60583862

研究成果の概要（和文）：主に、 $G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群に付随する cyclotomic Hecke 代数と、その準遺伝被覆の1つである cyclotomic  $q$ -Schur 代数のモジュラー表現論について研究した。cyclotomic  $q$ -Schur 代数のモジュラー表現論においては、指標を決定することが基本的な問題の1つであり、Weyl 加群と呼ばれる標準的な加群の指標を組み合わせ論の言葉を用いて表すことができた。また、誘導、制限関手を定義し、これらを用いて、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の加群のなす圏が、Fock 空間を圏化していることを示し、モジュラー表現論への応用を与えた。

研究成果の概要（英文）：We studied about modular representation theory of cyclotomic Hecke algebras and cyclotomic  $q$ -Schur algebras associated with the complex reflection groups of type  $G(r, 1, n)$ . In the modular representation theory, it is one of the important problems to determine the character of modules. We described the character of Weyl modules of cyclotomic  $q$ -Schur algebras by using some combinatorics. We also defined induction and restriction functors. By using these functors, we showed that module categories of cyclotomic  $q$ -Schur algebras categorify the Fock space.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	650,000	195,000	845,000
2011 年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,610,000	483,000	2,093,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：表現論, Hecke 代数, Schur 代数, 複素鏡映群

## 1. 研究開始当初の背景

複素鏡映群に付随して定義される cyclotomic Hecke 代数は、実鏡映群(複素鏡映群の一部)に付随する Iwahori-Hecke 代数の一般化とみなすことが出来る。

また、近年、複素鏡映群に付随して有理 Cherednik 代数と呼ばれる代数が導入され、その表現論と cyclotomic Hecke 代数の表現

論との間に強い関係があることが分かっている。またこれらの表現論の背後には様々な分野の数学(あるいは物理)と関連した構造が潜んでいると考えられている。

$G(r, 1, n)$  型の cyclotomic Hecke 代数は、A 型の affine Hecke 代数の商代数であることが知られており、そのこと(そこでの幾何

的解釈)を通じて、その表現論を量子群における結晶基底、標準基底の言葉を用い記述することができる。現在 LLT-有木理論と呼ばれるこの事実は量子群(あるいはその加群)の圏化という立場で広く一般化され、活発に研究されている。

複素鏡映群に付随する代数の表現論は、上記の枠組みで理解されるべき対象であると考えられており、それを通じて、理論のさらなる広がりが得られると期待されている。

また、対称群や一般線形群の表現論における様々な性質の組み合わせ論を用いた古典的な記述が、複素鏡映群に付随する代数の表現論へ拡張されることが期待されている。

## 2. 研究の目的

複素鏡映群に付随する代数達のモジュラー表現論について研究する。特に、cyclotomic Hecke 代数、rational Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  の表現論について調べる。そのような代数の1つである Ariki-Koike 代数とそれに付随する cyclotomic  $q$ -Schur 代数について具体的に調べていくとともに、そこで得た結果を他の型の cyclotomic Hecke 代数、rational Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  へ拡張し、それらのモジュラー表現論を統一的に扱う理論の確立を目指す。特に、以下の点に焦点を絞って研究を行う。

(1) cyclotomic  $q$ -Schur 代数の表現論を組み合わせ論を用いて記述する。

cyclotomic  $q$ -Schur 代数が半単純な場合は、その任意の表現は Weyl 加群と呼ばれる標準的な加群の直和と同型になる。よって Weyl 加群の指標を記述することが基本的な問題となるが、これを組み合わせ論を用いて記述する。また、その性質を組み合わせ論的に特徴づける。これらは、対称群や一般線形群の表現論において知られていることの一般化となることが期待できる。

cyclotomic  $q$ -Schur 代数が半単純でないときは、既約加群の指標を記述することが基本的な問題の一つとなる。これは、Weyl 加群の組成重複度(分解定数と呼ばれる)を求めることと同値である。これらを(広い意味で)組み合わせ論によって記述することを目指す。これは次項とも関係する。

(2) Ariki-Koike 代数の表現論における LLT-有木理論を cyclotomic  $q$ -Schur 代数まで拡張する。

cyclotomic  $q$ -Schur 代数の加群のなす圏の間に誘導、制限関手を定義し、これらを用いて Fock 空間を圏化する。また、Fock 空間の standard, canonical, dual canonical 基底と、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の Weyl 加

群、射影直既約加群、既約加群とを同定することによって、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の表現論を Fock 空間の様々な基底を用いて記述する。

(3) 上記の(1)、(2)の事柄(及び既に知られていること)を  $G(r, p, n)$  型の複素鏡映群に付随する cyclotomic Hecke 代数や有理 Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  の表現論へ拡張する。

## 3. 研究の方法

(1) 研究集会等に参加するなどして、関連する研究の情報収集を行うとともに、関係する研究者と議論することにより理解を深め、本研究を進めていく。また、得られた結果を研究集会等で公表する。

(2) 出張、あるいは関係する研究者を招聘することにより、専門知識の提供を受けたり、自身のアイデアや得られた結果等について説明し議論することにより、本研究内容を整理し、さらなる発展へと繋げていく。

(3) 書籍等を購入し、これまでに知られている事項について調べ、それらと本研究の関係を明確にする。また、新たな知識を獲得することにより、本研究に生かす。

(4) 研究代表者の研究拠点において、代数セミナーを定期的に開催し、研究拠点における研究活動を活性化させ、広い視点から本研究を見つめなおすことにより、本研究の位置付け、関連する話題への応用、新たな視点の獲得等を行いながら、本研究を進めていく。

## 4. 研究成果

(1) 研究代表者によって既に得られている cyclotomic  $q$ -Schur 代数の生成元と基本関係式による表示を用いて、A 型の量子群のある Levi 部分代数から cyclotomic  $q$ -Schur 代数への代数としての準同型を与えた。この準同型を通じて cyclotomic  $q$ -Schur 代数の Weyl 加群を量子群の加群とみなした時のその結晶基底を、(Dipper-James-Mathas の意味での)半標準盤を用いて記述し、その性質を用いて、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の Weyl 加群を量子群の Weyl 加群へ分解したときの重複度を求めるアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは、古典的な Littlewood-Richardson ルールの一般化とみなすことができる。さらに、量子群の Weyl 加群について知られていることと合わせて、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の Weyl 加群の指標が、Schur 多項式の線形和(係数は上述の重複度で与えられる)で表されることを示した。このことによって、ランクを全て動かした cyclotomic  $q$ -Schur 代数の加群のなす圏

の Grothendieck 群と、対称関数環とが同型になることが分かる。しかし、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の Weyl 加群に対応する対称関数の(上記の重複度と Schur 関数を用いた記述を使わない)組み合わせ論的な特徴付けはまだ出来ていない。

また、この対称関数のいくつかの性質を調べるとともに、cyclotomic  $q$ -Schur 代数のモジュラー表現論への応用をいくつか得た。

(2) 異なるランクの cyclotomic  $q$ -Schur 代数の有限次元表現のなす圏の間に、研究代表者により既に得られていた cyclotomic  $q$ -Schur 代数の生成元と関係式による表示を用いることによって、誘導、制限関手を定義し、それらが互いに左かつ右随伴であることを示した。また、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の標準加群(余標準加群)に誘導、制限関手を適用した加群の性質を調べた。その応用として、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の有限次元表現のなす圏の各ブロックへの射影を用いることによって、誘導、制限関手を細分化することで、これらの関手を伴った(ランクを全て動かした) cyclotomic  $q$ -Schur 代数の有限次元表現のなす圏を用いた higher level の Fock 空間の圏化を与えた。さらに、この圏化を通じ、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の表現と、Fock 空間のそれぞれの性質の関係について考察した。

また、cyclotomic  $q$ -Schur 代数の有限次元表現のなす圏と対応する有理 Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  とが、Ariki-Koike 代数の準遺伝被覆として同値になる場合に、今回定義した制限、誘導関手が、Bezrukavnikov-Etingof によって定義された、有理 Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  の間の誘導、制限関手と(準遺伝被覆としての同値を通じて)同値となることを示した。このことにより、今回の cyclotomic  $q$ -Schur 代数の有限次元表現のなす圏を用いた Fock 空間の圏化は、Shan によって与えられている有理 Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  を用いた Fock 空間の圏化の”ドミナント版”とみなすことが出来る。両者の違いは、標準加群を誘導(制限)した時の filtration の現れ方に見ることが出来る。しかし、これらの”ズレ”に関しては、まだ多くの問題が残されている。

(3) 有理 Cherednik 代数や、他の型の複素鏡映群に付随する代数への拡張について、いくつか考察したが、まだまとまった結果は得ていない。 $G(r, 1, n)$  型の場合に、予想以上に多くの拡がりが見られそうなので、取り敢えず、そちらを片付けていくことが重要であるように思われる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Kentaro Wada, Blocks of category  $\mathcal{O}$  for rational Cherednik algebras and of cyclotomic Hecke algebras of type  $G(r, p, n)$ , Osaka J. Math. 48 (2011), 895-912, 査読有.
- ② Kentaro Wada, Presenting cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Nagoya Math. J., 201 (2011), 45-116, 査読有.
- ③ Kentaro Wada, On decomposition numbers with Jantzen filtration of cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Represent. Theory 14 (2010), 417-434, 査読有.
- ④ Toshiaki Shoji and Kentaro Wada, Cyclotomic  $q$ -Schur algebras associated to the Ariki-Koike algebra, Represent. Theory 14 (2010), 379-416, 査読有.
- ⑤ Kentaro Wada, The representation type of Ariki-Koike algebras and cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Adv. Math. 224 (2010), 539-560, 査読有.

[学会発表] (計 10 件)

- ① Kentaro Wada, Drinfeld type realization of cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Representation Theory of Chevalley Groups and Related topics, 2012年3月12日, 名古屋大学.
- ② Kentaro Wada, Drinfeld type realization of cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Shanghai Workshop on Representation Theory, 2011年12月11日, 上海(中国)
- ③ 和田堅太郎, cyclotomic  $q$ -Schur 代数を用いた Fock 空間の圏化, Workshop on Representation theory of Algebras, 2011年9月14日-16日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
- ④ 和田堅太郎, Induction and restriction functors for cyclotomic  $q$ -Schur algebras, 第14回代数群と量子群の表現論研究集会, 2011年6月5日, 国民宿舎 小豆島(香川県).
- ⑤ Kentaro Wada, Induction and Restriction functors for cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Shanghai Workshop on Representation Theory, 2010年12月12日, 上海(中国)
- ⑥ 和田堅太郎, On Weyl modules of cyclotomic  $q$ -Schur algebras, 日本数

学会 秋季総合分科会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学.

- ⑦ 和田堅太郎, Blocks of category 0 for rational Cherednik algebras and of cyclotomic Hecke algebras of type  $G(r, p, n)$ , 日本数学会 秋季総合分科会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学.
- ⑧ Kentaro Wada, On cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, 2010 年 8 月 4 日, 名古屋大学.
- ⑨ 和田堅太郎, On cyclotomic  $q$ -Schur algebras, Diagram algebras and related topics, 2010 年 7 月 8 日, 健康文化村カルチャーリゾートフェストーネ (沖縄県).
- ⑩ 和田堅太郎, On Weyl modules of cyclotomic  $q$ -Schur algebras, 第 13 回代数群と量子群の表現論研究集会, 2010 年 6 月 5 日, すいとびあ江南 (愛知県).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

和田 堅太郎 (WADA KENTARO)

信州大学・理学部・助教

研究者番号 : 60583862