様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月１０日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2010～2011
課題番号：２２８４００４１
研究課題名（和文）重み付き安定曲線のモジュライ空間のコホモロジーとモジュラー形式の研究
研究課題名（英文）A study of cohomology of the moduli spaces of weighted stable curves and modular forms

研究代表者
三鍋　聡司（MINABE SATOSHI）
東京電機大学・工学部・助教
研究者番号：３０４５５６８８

研究成果の概要（和文）：安定な点付き有理曲線のモジュライ空間を考える。この空間のコホモロジーは自然に対称群の線形表現となる。重み付き安定曲線を用いてこの表現の性質を研究し、表現の指標を求めるアルゴリズムを得た。その応用として、コホモロジーの対称群の表現としての指標の長さに関する、ファーバーとパンドハリパンデによる評価式の最良性を証明した。

研究成果の概要（英文）：We give a recursive algorithm to compute the character of the cohomology of the moduli space of stable n-pointed genus zero curves as a representation of the symmetric group on n letters. Using the algorithm we can show a formula for the maximum length of this character. Our main tool is connected to the moduli spaces of weighted stable curves.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,050,000	315,000	1,365,000
2011 年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,010,000	603,000	2,613,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：代数曲線のモジュライ空間・コホモロジー・対称群の表現・ホッジ構造

１．研究開始当初の背景

（１）与えられた図形の起こり得る全ての変化をパラメトライズする空間をモジュライ空間と言う。例えば、三角形のモジュライ空間とは、平面上の三角形の合同類全体をパラメトライズする空間のことである。三角形の合同類は３辺の長さで決まる。よって、三角形のモジュライ空間は、三角不等式を満たす３つの正の数の組全体である。

（２）幾何学的に重要な対象のジュライ空間は、それ自身が重要な数学的構造を持つ場合が多い。代数曲線のモジュライ空間はその典型例である。例として、楕円曲線のモジュライ空間を考える。楕円曲線は、位相的にはドーナツの表面の形をした曲面である。その曲面上の、複素構造という位相よりも精密な構造の同型類をパラメトライズするのが、楕円曲線のモジュライ空間である。これは、楕円関数論を通して１９世紀から研究されてきたが、現代においても代数・幾何・解析が交差する場として重要な研究対象である。

（３）代数曲線上にｎ個の点が指定された、

ｎ点付き代数曲線というものを考える。そのモジュライ空間は、通常の代数曲線のモジュライ空間に、ｎ個の点の位置の自由度を付け加えたものになる。このモジュライ空間のコホモロジーを考える。ここでコホモロジーとは、空間の位相に関する情報を凝縮させて作られる線形空間で、空間の抽象化された意味での形を表している。空間が持つ重要な情報の多くは、何らかの形でコホモロジーに反映される。一般に、モジュライ空間のコホモロジーが持つ構造を明らかにすることは、幾何学における重要問題の１つである。

２．研究の目的

（１）上記のｎ点付き代数曲線のモジュライ空間には、ｎ点の置換としてｎ次対称群が自然に作用する。この作用によってモジュライ空間のコホモロジーは対称群の線形表現となる。この表現の構造を明らかにすることを目的として研究を行った。

（２）コホモロジーを対称群の表現として既約分解することで、コホモロジーの持つホッジ構造や、モジュラー形式との関係を見いだすことができる。これによって、モジュライ空間のコホモロジーとモジュラー形式の関係を明らかにすることも目標の１つとした。

３．研究の方法

本研究で技術的に重要であるのは、重み付きの点付き安定曲線と、そのモジュライ空間であった。これを用いた点付き安定曲線のモジュライ空間の研究手法について説明する。

（１）重み付きの点付き代数曲線とは、代数曲線上に点を指定するだけでなく、さらにそれらの点に重みという数を与えたものである。この重みを変動させると、n 個の点のうちの幾つかを合流させることができる。これは、ハセットによって 2003 年の論文で導入された概念である。

（２）安定な重み付きの点付き代数曲線についても、そのモジュライ空間を考えることができる。これは、安定な点付き安定曲線のモジュライ空間の一般化であり、それを特別な場合として含むものになっている。

（３）重み付きのモジュライ空間は、重みというデータに依存して決まる。つまり、重みごとに無数のモジュライ空間が存在することになる。そのようなモジュライ空間たちの相互関係、すなわち、重み付きのモジュライ空間たちがどのようなネットワークを形成するかを考える。すると、大きい重みのモジュライ空間から小さい重みのモジュライ空間への双有理写像が存在することが分かる。また、点付き代数曲線のモジュライ空間は、重み付きのモジュライ空間の重みが最大の場合となっており、上で述べたネットワークの始点に位置することが分かる。

（４）上で述べたことを用いて、点付き代数曲線のモジュライ空間に次のようにアプローチする。まず、重み付きのモジュライ空間たちのネットワークの終点となる重み付きのモジュライ空間を見付ける。次に、点付き代数曲線のモジュライ空間から終点への写像（ネットワークの経路）を、その中間地点にある重み付きのモジュライ空間たちを経由させることによって、ブローアップという分かりやすい写像の合成に分解する。このブローアップの列を終点から出発して遡って行けば、最後には点付き代数曲線のモジュライ空間（始点）に到達する。途中経過で現れる空間は全て重み付きのモジュライ空間である。従って、それらのコホモロジーの構造が既知ならば、ネットワークの終点に位置する点付き代数曲線のモジュライ空間のコホモロジーも分かることになる。

（５）重み付きの点付き代数曲線という概念の重要な点は、重みを変動させると、n 個の点のうちの幾つかを合流させることができ、点の数を少なくすることができるという点である。これによって、上記のアプローチを点の数に関する帰納法の形で定式化することが可能となる。さらに、1 つのモジュライ空間から他のモジュライ空間への双有理写像をブローアップの合成に分解する際、対称群の作用に関して同変的になるようにすることができる。これによって、コホモロジーの対称群の表現としての構造についても、ブローアップの列を解析することで調べることが可能となる。

４．研究成果

本研究の研究成果は、以下に述べる２点である。

（１）安定有理曲線のモジュライ空間のコホモロジーの対称群指標に関する成果

代数曲線の種数がゼロの場合を考える。このとき、上で説明した重み付き安定曲線を用いる方法により、点付きの安定有理曲線のモジュライ空間を比較的分かりやすい空間からのブローアップの繰り返しとして構成できる。この構成を対称群の作用も含めて解析することにより、モジュライ空間のコホモロジーを既約分解することができる。この方法

の利点は、ブローアップが点の数 n に関して帰納的な構造を持っている点である。これによって、既約分解を点の数（すなわち対称群の次数）に関して帰納的に計算することができる。また表現の性質に関する命題を帰納法で証明するための手段にもなる。この手法を用いて次の結果を得た。

① モジュライ空間のコホモロジーの表現の指標公式
② 指標の長さの最大値公式

コホモロジーの指標の表示式はゲツラーによって以前から得られていたが、本研究で得られた公式は指標を求めるアルゴリズムである。計算は点の数 n について帰納的に行われ、これによって計算効率が向上した。また技術的な面では、重み付きの点付き代数曲線を用いた点が新しい点である。得られたアルゴリズムの応用として、コホモロジーの対称群の表現としての長さに関するファーバーとパンドハリパンデによる評価式の最良性を証明した。

今後の展望として、これらの結果を代数曲線の種数が正の場合に拡張する問題が考えられる。本研究で用いた手法は、基本的には種数が正の場合にも適用可能と考えられるが、種数が正の場合には、モジュライ空間をブローアップの合成として構成する際、構成の出発点となる空間の同定が問題となる。また、指標の長さの最大値公式については、種数が正の場合には、モジュライ空間上の標準類と呼ばれるコホモロジー類たちのなす部分表現の長さの最大値公式として一般化されると考えられる。これらについては今後の研究課題としたい。

以上の成果は、共同研究者であるベルグストローム（スウェーデン王立工科大学）との共同研究で得られたものであり、論文（投稿中）がプレプリントサーバ arXiv.org において公開されている。下記の URL からアクセス可能である。
http://arxiv.org/abs/1111.6438

なお、当初目標としていたモジュラー形式とモジュライ空間のコホモロジーとの関係については、有理曲線に関する今回の成果では得られなかった。モジュライ空間のコホモロジーとモジュラー形式とが関係するのは、代数曲線の種数が１以上の場合であり、これについては今後の研究課題としたい。

（２）ロゼフ・マニン空間のコホモロジーの対称群指標に関する成果

ロゼフ・マニン空間とは、ロゼフとマニンによる 2000 年の論文で導入された空間である。これは、重み付きの点付き代数曲線のモジュライ空間の一種であると同時に、トーリック多様体でもあるという、特別な性質をもった空間である。この空間には対称群の直積群が作用しており、ロゼフ・マニン空間のコホモロジーはその表現となる。この表現の指標についても研究を行い、次の成果を得た。

① ロゼフ・マニン空間のコホモロジーの表現の指標公式
② 指標の生成関数の公式

まず、ロゼフ・マニン空間のモジュライ空間としての階層構造と、トーリック多様体としての階層構造が一致するという事実を用いることで、ロゼフ・マニン空間のコホモロジーの対称群指標の公式を求めた。これは、アルゴリズムではなく点の数に関して閉じた形の公式であり、分割に関する足し合わせの形の式で与えられる。また、その公式を利用して、指標を足し上げてえられる生成関数の具体形も求めた。結果として、対称関数の視点からも興味深いと考えられる指標の公式が得られた。トーリック多様体の観点からは、ロゼフ・マニン空間は A 型のルート系のワイル部屋に付随する扇から定まる多様体であり、上記の群作用は A 型のディンキン図形の対称性に対応している。

この成果も、共同研究者であるベルグストローム（スウェーデン王立工科大学）との共同研究で得られたものであり、論文（投稿中）はプレプリントサーバ arXiv.org において公開されている。下記の URL からアクセス可能である。
http://arxiv.org/abs/1108.0338

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 三鍋聡司、安定有理曲線のモジュライ空間のコホモロジーの対称群指標、第５８回幾何学シンポジウム予稿集、査読無、164-168（2011）．
http://geometry.mail-box.ne.jp/abstract.html

② Yukiko Konishi and Satoshi Minabe、Local B-model and Mixed Hodge structure、査読有、Advances in Theoretical and Mathematical Physics,14 (2010), No. 4, 1089-1145.
http://www.intlpress.com/ATMP/ATMP-issue_14_4.php

〔学会発表〕(計８件)

① 三鍋聡司、Local A-model and mixed Hodge structure、研究集会「ホモロジー的ミラー対称性の SYZ 的アプローチ」、2012 年 3 月 21 日千葉大学理学部（千葉県）.

② 三鍋聡司、On the cohomology of moduli spaces of (weighted) stable rational curves、重み付き安定曲線のモジュライ空間とモジュラー形式の研究セミナー、2011 年 12 月 9 日、東京電機大学神田キャンパス（東京都）.

③ 三鍋聡司、安定有理曲線のモジュライ空間のコホモロジーの対称群指標、第 58 回幾何学シンポジウム、2011 年 8 月 25 日、山口大学理学部（山口県）.

④ 三鍋聡司、On the cohomology of moduli spaces of (weighted) stable rational curves、研究集会「Mini-workshop on Mirror Symmetry」、2011 年 3 月 9 日、北海道大学理学部（北海道）.

⑤ 三鍋聡司、Local B-model and Mixed Hodge structure, Algebra and Geometry Seminar, 2011 年 2 月 16 日, スウェーデン王立工科大学（スウェーデン王国）.

⑥ ヨナス・ベルグストローム、三鍋聡司、Losev-Manin モジュライ空間のコホモロジーについて、日本数学会秋季総合分科会、幾何学分科会、 2010 年 9 月 22 日、名古屋大学（愛知県）.

⑦ ヨナス・ベルグストローム、三鍋聡司、(重み付き)安定有理曲線のモジュライ空間のコホモロジーの指標について、日本数学会秋季総合分科会、幾何学分科会、 2010 年 9 月 22 日名古屋大学（愛知県）.

⑧ 小西由紀子、三鍋聡司、 局所 B 模型と混合ホッジ構造, 日本数学会秋季総合分科会、幾何学分科会、2010 年 9 月 22 日名古屋大学（愛知県）.

６．研究組織
(1)研究代表者
三鍋　聡司（MINABE SATOSHI）
東京電機大学・工学部・助教
研究者番号：30455688

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし