

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20331

研究課題名（和文）非線形拡散方程式に対する非周期的時空均質化問題の定性・定量解析

研究課題名（英文）Qualitative and quantitative analysis of non-periodic space-time homogenization problems for nonlinear diffusion equations

研究代表者

岡 大将 (Oka, Tomoyuki)

東京大学・大学院工学系研究科（工学部）・特任助教

研究者番号：00962268

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では、非線形拡散方程式に対する時空均質化問題に対して均質化方程式を導出し、係数行列場の極限に対応する均質化行列を特徴づけ、非線形拡散の違いが均質化行列の表現に深く関係することを明らかにした。また、係数行列場に追加の仮定を課さずに解の勾配が強収束しないことを証明した。その他、非線形問題に対するH-収束性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

均質化問題は、数学のみならず材料科学を始めとした諸分野と深く関係しており、最適設計問題への応用の観点から、均質化問題の研究が進展することは学術的のみならず社会的にも重要である。また、既存の静的線形問題に対する均質化理論を動的非線形問題へと拡張することは、数学的理論の深化に留まらず、新たな融合領域研究の基礎も成す。

研究成果の概要（英文）：This study derived the homogenized equation for the space-time homogenization problem of nonlinear diffusion equations. Furthermore, the homogenized matrix was characterized, and it was clarified that differences in nonlinear diffusion deeply depend on the representation of the homogenized matrix. In particular, it was proved that the gradient of the solution does not converge strongly without imposing additional assumptions on the coefficient matrix field. Besides, H-convergence for a nonlinear problem was proved.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：時空均質化問題 非線形拡散方程式 時空unfolding法 時空2スケール収束

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

均質化問題は材料科学を始めとした諸分野でしばしば用いられている均質化法に基づいた数学的問題であり、周期的に振動する係数行列場を含む偏微分方程式に対して、周期をゼロに極限を取った際に、解の極限が満たす均質化方程式を厳密に導出する問題として知られている。線形楕円型方程式に対する(周期的)均質化問題の研究成は数多く報告されており、係数行列場の振動の影響によって、係数行列場と解の勾配の積を意味する拡散束の収束極限を特定する際に弱収束する関数同士の積の極限を考察するの必要があり、線形問題でさえ非線形問題と同程度の解析の困難さを持つことが知られている。そのため、静的かつ線形問題に対する均質化問題の研究と比較して、動的かつ非線形問題に対する研究成はそれほど多くなく、方程式の時間発展性や非線形性の影響が均質化方程式にどのように現れるかについての詳細が十分に明らかになっていない印象である。

2. 研究の目的

本研究では、動的かつ非線形問題のモデルケースとして非線形拡散方程式を考え、均質化方程式に時間発展性や非線形性の影響がどのように現れるかについて詳細に解析することを目的とし、特に、係数行列場の極限に対応する均質化行列の定性的な性質を明らかにする。

次に、解の収束性について定性的かつ定量的な情報を引き出すことを目的とする。均質化問題では、係数行列場の振動の影響により、解の勾配に対する強コンパクト性が喪失することが知られている一方で、この事実を示すためには、係数行列場に対する追加の仮定が一般に要求される。そのため、本研究では、係数行列場に対する必要最小限の仮定の下で、非線形拡散方程式の場合に強コンパクト性の破れが起こることを証明し、収束レートに関する情報を引き出す。

さらに、考察対象となる材料が周期的な構造を持つとは一般に限らない観点から、係数行列場に課される周期性という仮定を外し、非周期的均質化問題についても考察する。

3. 研究の方法

本研究では、関数解析的手法に基づいて均質化方程式を導出する。その際、振動の影響を詳細に解析するために、2スケール収束と呼ばれる収束理論や、それと同値な unfolding 法と呼ばれる手法を導入する。さらに、非周期化に向けてより一般的な枠組みとして H-収束性について注目し、非線形問題に対する H-収束性について考察する。

4. 研究成果

- (1) 非線形拡散方程式に対して、周期的に時空間で振動するような係数行列場を伴う時空間均質化問題について考察した。その結果、線形拡散方程式の場合と同程度の精度で均質化行列の性質を明らかにし、時空間周期が特定のスケール比を持つときに限って方程式の非線形構造が均質化行列に影響を及ぼすことを明らかにした。特に、非線形拡散の違いが均質化行列の表現に影響することも明らかにし、拡散の伝播速度の違いが均質化行列の表現に深く関係することを証明した。一方、係数行列場が十分に滑らかな場合に、解の勾配に対する強コンパクト性の破れを証明することにも成功した。これらの結果を学術論文としてまとめ、[1]にて掲載された。また、これらの結果は時空 2 スケール収束理論に基づくものであり、独自に整備した時空 unfolding 法を用いた場合についても[7]にて報告した。
- (2) 係数行列場に追加の正則性を課した下で、強コンパクト性の破れを証明した[1]の成果をさらに改良することに成功した。具体的には、最小限の追加の仮定でこの事実を証明することが当初の目的であったが、この追加の仮定を完全に取り除くことができた。その際、時空 2 スケール収束理論ではなく、それと同値な時空 unfolding 法を用いた解析に切り替えた点と均質化行列の構成要素であるセル問題の解の正則性を詳細に解析した点が証明の鍵となった。[1]では、解の勾配に対する 2 スケール極限として現れる項を修正項として解の勾配に対する修正項付きの強収束性を証明することで強コンパクト性の破れを証明していたが、ここでは、unfolding 作用素の随伴作用素を介した別の修正項を構成することによって、修正項の正則性を改良することで、係数行列場に対する追加の仮定を取り払うことに成功した。この結果を学術論文にまとめ、[3]にて掲載された。また、これらの成果から、解の収束レートに関する定量解析に於いて、線形拡散方程式の場合と同程度の結果が得られることが示唆され、局所的なエネルギー評価が証明の鍵になることが示唆された。
- (3) 局所的なエネルギー評価のアイデアを応用し、当初予定していなかった別の定量的な収束レートに関する成果が得られた。幾何学的特徴量の基礎を成す距離関数はアイコナル方程式の解として特徴づけられるため、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の極限として特徴づ

けられる．その際，解の距離関数への収束性に関して，コール・ホップ変換を介した局所的なエネルギー評価を用いることで，最適な収束レートに関する成果を挙げることに成功し，その際得られた成果を[2]にて報告した．

- (4) H-収束性を非線形問題へと一部拡張し，さらに最適設計問題へ応用することにも成功した．均質化問題では一般に，係数行列場に対して周期性の仮定が課され，周期性を用いることで均質化行列を明示的に特徴づけることができる．その一方で，周期性の仮定を外し，一様楕円性のみを課した場合が H-収束に対応し，方程式の線形性と深く関係していることが知られている．本研究では，(1)の均質化行列の特徴づけを通して，均質化行列が臨界の場合を除いて領域内部のユニットセルの影響しか受けないことに着目し，境界条件が非線形性を伴う場合に拡張できることを証明した．さらに，非線形境界条件を伴う最適設計問題に対する最適解の存在定理にこの結果を応用し，同値な緩和問題に対する最適解の存在定理の証明に成功した．これらの成果を[8]にて報告し，現在学術論文として投稿する段階に至っている．
- (5) 非線形拡散方程式に対する均質化行列の定性的性質を明らかにする際に，非線形拡散の特異性や退化性に注目することによって，これらの性質を最適設計問題へと応用することにも成功した．具体的には，最適設計問題に於ける数値解析の一つに反応拡散方程式を用いた形状の更新方法が知られているが，そこに拡散の特異性や退化性を応用することで，数値解析に於ける収束性の改良に成功した．これらの結果は[4]，[6]にて掲載され，また，関連する成果が[5]にて掲載された．

以上より，本研究では，既存の線形楕円型方程式に対する均質化理論を非線形拡散方程式に対する時空均質化理論へと拡張し，方程式の時間発展性や非線形性が均質化方程式にどのような影響を及ぼすか明らかにした．さらに，均質化行列や解の勾配に対する収束性に於いて定性的な性質を引き出すことに成功した．また，これらの結果の非周期化や定量解析に進展するに当たり，均質化問題に関連する諸分野への応用にも成功した．

参考文献

- [1] G. Akagi, T. Oka, *Journal of Differential Equations* 358 (2023), 386-456.
[2] T. Hasebe, J. Masamune, T. Oka, K. Sakai, T. Yamada, arXiv:2401.17665 [math.AP] (2024), 1-19.
[3] T. Oka, *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* 10 (2022), 171-190.
[4] T. Oka, T. Yamada, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 408 (2023), 115940.
[5] T. Oka, R. Misawa, T. Yamada, *Applied Mathematical Modelling* 120 (2023), 57-78.
[6] T. Oka, *Mathematics and Computers in Simulation* 223 (2024), 299-306.
[7] T. Oka, *RIMS Kôkyûroku*, 2024 (In press).
[8] 岡 大将, *数理解析研究所講究録* 2251 (2023), 14-28.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akagi Goro, Oka Tomoyuki	4. 巻 358
2. 論文標題 Space-time homogenization for nonlinear diffusion	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 386 ~ 456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2023.01.044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Oka Tomoyuki	4. 巻 10
2. 論文標題 Corrector results for space-time homogenization of nonlinear diffusion	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematics and Mechanics of Complex Systems	6. 最初と最後の頁 171 ~ 190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/memocs.2022.10.171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Oka Tomoyuki, Yamada Takayuki	4. 巻 408
2. 論文標題 Topology optimization method with nonlinear diffusion	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	6. 最初と最後の頁 115940
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cma.2023.115940	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Oka Tomoyuki, Misawa Ryota, Yamada Takayuki	4. 巻 120
2. 論文標題 Nesterov's acceleration for level set-based topology optimization using reaction-diffusion equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Applied Mathematical Modelling	6. 最初と最後の頁 57 ~ 78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apm.2023.03.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hasebe Takahiro, Masamune Jun, Oka Tomoyuki, Sakai Kota, Yamada Takayuki	4. 巻
2. 論文標題 Construction of signed distance functions with an elliptic equation	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 arXiv:2401.17665 [math.AP]	6. 最初と最後の頁 1~19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Oka Tomoyuki	4. 巻 223
2. 論文標題 Level set method via positive parts for optimal design problems of two-material thermal conductors	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematics and Computers in Simulation	6. 最初と最後の頁 299~306
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matcom.2024.04.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岡 大将	4. 巻 2251
2. 論文標題 非線形境界条件を伴うトポロジー最適化問題	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 14~28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 Corrector results for space-time homogenization of fast diffusion equations without assumptions for smoothness of coefficients
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 Homogenization problem with nonlinear boundary conditions and its application to topology optimization
3. 学会等名 7th camp Homogenization and its related topics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将, 喜多 航佑, 松島 慶
2. 発表標題 非線形境界条件を伴うトポロジー最適化問題
3. 学会等名 第19回日本応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 非線形境界条件を伴うトポロジー最適化について
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型) 偏微分方程式の解の幾何的様相 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 Optimal design problem with geometric constraints for manufacturing
3. 学会等名 Study Group "Functional Analysis and Applications" (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 Topology optimization problem with geometric constraints for manufacturing
3. 学会等名 第1回形状設計数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 消散型波動方程式に対する準周期的時空均質化問題
3. 学会等名 日本数学会 2023 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤木 剛朗, 岡 大将
2. 発表標題 Space-time periodic homogenization for nonlinear diffusion equation
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将, 喜多 航佑, 松島 慶
2. 発表標題 Homogenization problem for nonlinear boundary conditions and its applications to optimal design problems
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将, 山田 崇恭
2. 発表標題 Level set-based topology optimization method with nonlinear diffusion
3. 学会等名 ICIAM 2023 minisymposia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岡 大将
2. 発表標題 Qualitative analysis of space-time periodic homogenization for nonlinear diffusion equations
3. 学会等名 RIMS Workshop Evolution Equations and Related Topics -Energy Structures and Quantitative Analysis- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関