

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20332

研究課題名（和文）変形理論と局所志村多様体の研究

研究課題名（英文）Deformation theory and local Shimura varieties

研究代表者

伊藤 和広 (Ito, Kazuhiro)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：90962267

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000 円

研究成果の概要（和文）：G-ディスプレイと呼ばれる概念を，Bhatt-Scholze が導入したプリズムの理論の文脈で研究した．ここで G は p 進整数環上の簡約群である． G が一般線形群の場合，G-ディスプレイは Breuil-Kisin 加群とみなせる．特に，標数 p の完全体上の G-ディスプレイに対し普遍変形環を構成した．応用として超特殊なレベル構造を持つ局所志村多様体の整モデルの局所構造を決定した．Drinfeld, Bhatt-Lurie が導入したプリズマティック F ゲージとプリズム上の G-ディスプレイの関係を調べ，基礎環が正則（特異点がない状況）であれば，本質的に同じ対象であることを証明した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所ラングランズ対応への応用もあり，局所志村多様体と呼ばれるモジュライ空間は重要な対象である．本研究では G-ディスプレイを用いて，局所志村多様体をプリズムの圏上のモジュライ関手として解釈することで局所構造を決定した．局所志村多様体の先行研究は，ほとんどが付加構造付きの p 可除群のモジュライ空間である場合に限定されたものであったが，本研究の手法では任意の局所志村多様体を扱える．局所志村多様体に限らず，数論幾何学における多くのモジュライ空間がプリズムを用いて精密化されることが期待でき，本研究はその第一歩である．

研究成果の概要（英文）：I have studied the notion of G-displays in the context of the prismatic theory introduced by Bhatt-Scholze. Here G is a reductive group over the ring of p -adic integers. If G is the general linear group, then G-displays can be regarded as Breuil-Kisin modules in the integral p -adic Hodge theory. In particular, I constructed the universal deformation ring for G-displays over a perfect field of characteristic p . As an application, I determined the local structure of the integral model of a local Shimura variety with hyperspecial level structure. Moreover, I studied the relationship between prismatic F-gauges (introduced by Drinfeld and Bhatt-Lurie) and our G-displays, and proved that they are essentially the same objects when the base ring is regular.

研究分野：数論幾何学

キーワード：局所志村多様体 G ディスプレイ プリズマティックコホモロジー プリズマティック F ゲージ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ラングランズ対応の局所体に対する類似である局所ラングランズ対応の解決に向けて、志村多様体の p 進解析的類似である局所志村多様体 (local Shimura variety) と呼ばれるモジュライ空間が Scholze によって導入され、注目されている。その「整モデル」もモジュライ空間として導入されたが、まだ幾何的な構造が十分に知られていなかった。研究開始当初、先行研究はほぼ Pappas-Rapoport によるものしかなく、そこでは p 可除群のモジュライ空間である Rapoport-Zink 空間と結び付けられるもの (いわゆるアーベル型) のみ研究している。また Rapoport-Zink 空間の幾何を経由して研究するという間接的な手法であり、そのため $p=2$ の場合が扱えないという問題点もあった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、局所志村多様体の (超特殊なレベルでの) 整モデルの局所構造を解明し、Pappas-Rapoport の先行研究を一般化することである。ここでの局所志村多様体の整モデルは、 p 進整数環上の簡約群 G と (その minuscule な余指標) から定まる。より正確には G -shtuka と呼ばれる対象のモジュライ空間として定義される。つまり、本研究の目的は G -shtuka の変形理論を確立することと言い換えられる。

3. 研究の方法

G -shtuka はパーフェクトイド空間を用いて定義される対象であるため、そのまま変形理論を行うことが難しい。そのため、本研究では Bhatt-Scholze が導入したプリズム (prism) と呼ばれる対象に注目した。プリズムは適当な意味でパーフェクトイド空間を一般化した対象である。 G -shtuka という概念をプリズム上に拡張したものは、Lau が導入した G -ディスプレイという概念をプリズム上に拡張したものであるべき、という考察をし、本研究ではプリズム上の G -ディスプレイの研究に注力した。 G が一般線形群である場合、 G -ディスプレイは (高さが 1 以下の) Breuil-Kisin 加群とよばれる整 p 進 Hodge 理論における基本的な対象である。(高さが 1 以下の) Breuil-Kisin 加群は p 可除群と深く関係していることが知られている。本研究の目的を達成するため、 p 可除群を用いる代わりに、プリズムに対するさまざまな構造定理を利用して G -ディスプレイを研究する。

4. 研究成果

結果として、プリズム上の G -ディスプレイ (以下、プリズマティック G -ディスプレイともいう) の基礎理論、および変形理論は満足のいく形で確立することができた。より正確には標数 p の完全体上のプリズマティック G -ディスプレイに対して普遍変形環を構成し、その性質を研究した。この帰結として (超特殊なレベルでの) 局所志村多様体の整モデルの局所的な幾何構造を決定し、Pappas-Rapoport の先行研究を一般化することに成功した。この結果は、以下の点で当初想定したものよりも精密な形で得られた。

- (1) プリズムを一般化した概念を用いることで、 p 進整数環上 \mathbb{Z}_p 上の簡約群 G だけでなく、任意の p 進数体 \mathbb{Q}_p 上の有限次拡大体の整数環上の簡約群 G に対して同じ結果を証明することができた。
- (2) p 可除群の普遍変形環とプリズマティック G -ディスプレイの普遍変形環を比較することで、以前知られていた p 可除群の Breuil-Kisin 加群を用いた分類定理の別証明を与えることができた。同様の手法で、Scholze-Weinstein による p 可除群の Breuil-Kisin-Fargues 加群を用いた分類定理の別証明も与えた。

本研究課題の期間中に Drinfeld および Bhatt-Lurie によって導入されたプリズマティック F -ゲージ (prismatic F -gauge) という概念の研究が大きく進展した。そのため、本研究課題の 2 年目では、本研究で導入したプリズマティック G -ディスプレイとプリズマティック F -ゲージの関係を研究した。より具体的には、quasisyntomic 環と呼ばれる環のクラスに対して、特殊なプリズマティック F -ゲージである「プリズマティック G - F -ゲージ」を導入し、プリズマティック G - F -ゲージ全体のなす圏から、プリズマティック G -ディスプレイ全体のなす圏への充満忠実な関手を構成した。また、基礎環が正則 (特異点がない状況) であれば、その関手は圏同値を与えることを証明した。

以上の研究成果を論文としてまとめ、研究集会および各大学のセミナーにて講演した。

さらに、代数幾何学への応用として、プリズマティック G -ディスプレイを応用し、混標数の $K3$ 曲面の変形理論を研究した。結果として、 $K3$ 曲面の変形はそれらのプリズマティックコホモロジーによって完全に制御できることを (久賀・佐武対応を用いることなく) 証明した。この結果は標数 $p=2$ を含めて証明できるという点で、Nygaard-Ogus, Langer-Zink, Lau による先行研究の一般化となっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ito Kazuhiro	4. 巻 23
2. 論文標題 Uniform local constancy of etale cohomology of rigid analytic varieties	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 839 ~ 896
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S1474748022000615	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 G-displays over prisms and deformation theory
3. 学会等名 数学講演会，東京電機大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 G-displays over prisms and deformation theory
3. 学会等名 数論合同セミナー，京都大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 G-displays over prisms and deformation theory
3. 学会等名 代数学コロキウム，東京大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 G-displays over prisms and deformation theory
3. 学会等名 北大数論セミナー，北海道大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 Prismatic F-crystal の変形理論と p 可除群について
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 Periods of supersingular K3 surfaces
3. 学会等名 Workshop on crystalline Torelli theorems for irreducible symplectic varieties
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications
3. 学会等名 代数幾何セミナー，名古屋大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤和広
2. 発表標題 G-displays over prisms and deformation theory
3. 学会等名 Mini-workshop on the geometrization of the local Langlands correspondences and related topics
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>プレプリント1 著者：伊藤和広 論文標題：Prismatic G-display and descent theory 発表年：2023 参考：arXiv:2303.15814</p> <p>プレプリント2 著者：伊藤和広 論文標題：Deformation theory for prismatic G-displays 発表年：2023 参考：arXiv:2306.05361</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
英国	Imperial College London		