

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：13902

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20335

研究課題名（和文）曲線複体のkeen測地線の展開と応用

研究課題名（英文）Development and application of keen geodesics in the curve complex

研究代表者

井戸 絢子（Ido, Ayako）

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：00759532

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 800,000円

研究成果の概要（和文）：曲線複体のkeenの概念の展開と、3次元多様体のHeegaard分解及び絡み目の橋分解のHempel距離について研究し、Hempel距離1となるkeenな絡み目の橋分解の存在を明らかにすると共に、keenが実現できない場合があることを証明した。さらに、Weakly keenであってstrongly keenではない絡み目の橋分解の構成について、Hempel距離が1の場合は、keenの構成方法がうまく適用できることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた成果からweakly keenな3次元多様体の実現が期待できるようになった。これらはGoeritz群の有限性など3次元多様体の研究に大きく貢献できると考えられる。また、keenという性質がGoeritz群の有限性を判別する手法となっていることからわかるように、本研究の成果は、曲線複体の諸性質の汎用性を今後さらに高めることに寄与するものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：We studied the concept "keen" of the curve complex, and researched on Hempel distance for Heegaard splittings of 3-manifolds and bridge splittings of links. Then we showed the existence of keen bridge splittings of links with Hempel distance 1, and proved that keen cannot be realized in some cases. Furthermore, we found that the construction methods of keen bridge splittings can be successfully applied to the construction of "weakly keen" bridge splittings with Hempel distance 1.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Heegaard分解 曲線複体 橋分解 Hempel距離

1. 研究開始当初の背景

Harvey によって導入された曲線複体の概念は、Masur-Minsky によって大きく進展し、その諸性質の高い汎用性が知られている。例えば、3次元多様体の研究においては、曲線複体を用いて導入されるヘンペル距離[H]という不変量が、3次元多様体の Heegaard 分解(2つの同相なハンドル体の境界を同一視して3次元多様体を構成するという基本的な手法)の貼り合わせの効率の良さを表すパラメータになっており、強力な証明手法を提供している。この Hempel 距離について、研究代表者が奈良女子大学の小林毅氏、張娟姫氏との共同研究で導入した“keen”の概念は、曲線複体上の部分集合を繋ぐ測地線の一意性(有限性)についての性質で、種数3以上の Heegaard 分解を許容する3次元多様体で実現できるが、keen という性質が、実は Goeritz 群の有限性を判別する手法となること、井口大幹氏と古宇田悠哉氏の研究で示されている。このように、曲線複体の諸性質の汎用性は高まっており、今後益々展開が期待されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、曲線複体の“keen”の概念をさらに展開することで曲線複体の詳細な性質を解析し、その応用を推進することである。特に本研究では、3次元多様体を曲線複体上に投影したときに得られる模様(形状)に注目することで、“keen”や“weakly keen”を実現するような円盤複体や測地線の性質を解析すると同時に、“weakly keen”な3次元多様体の Heegaard 分解や橋分解の存在を明らかにすることを試みた。

3. 研究の方法

研究代表者が奈良女子大学の小林毅氏、張娟姫氏との共同研究で導入した“keen”の概念は、3次元多様体を曲線複体上に投影することで得られる2つ模様(円盤複体)を結ぶ最短経路(測地線)の始点と終点が一意である状況を表している。本研究では、keen や weakly keen を実現するような測地線の始点と終点に注目し、それらを実現するような曲面上の本質的な単純閉曲線の解析と、擬アノソフ写像等を用いた構成を試みた。またそれらを基に、特に弱 keen を実現する3次元多様体の構成を目指した。

4. 研究成果

1) 研究代表者は、小林毅氏、張娟姫氏との共同研究を継続し、Hempel 距離1となる絡み目の橋分解においては keen が実現できない場合があることを証明した。一方で絡み目の(1,1)-分解については Hempel 距離が1の場合は、常に keen であることが斎藤敏夫氏の結果から明らかであることが分かった。これらの結果は論文にまとめ、現在投稿中である。また、Hempel 距離が1となる keen な絡み目の橋分解の構成についてまとめた論文が RIMS Kokyuroku に掲載された。

2) 上記の結果について「東北結び目セミナー2023」で講演し、いくつかの貴重な議論を行うことができた。特に、これらの結果を得る過程で用いた手法や考察は、weakly keen で

あつて strongly keen でない Heegaard 分解や橋分解を構成する上でも有効であることが窺えており、特に Hempel 距離が 1 であるような絡み目の橋分解については、これまでの議論を応用することで、weakly keen な場合が構成できることがわかってきたため、小林毅氏、張娟姫氏との共同研究で引き続き考察を進めている。

3) これまでに得られた keen を実現するための測地線の構成方法の応用を応用する試みとして、向きつけ不可能曲面における測地線の構成と、その具体例の実現についての研究を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ayako Ido, Yeonhee Jang and Tsuyoshi Kobayashi	4. 巻 2263
2. 論文標題 On keen weakly reducible bridge splittings of links	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Ayako Ido
2. 発表標題 On keen weakly reducible bridge splittings of links
3. 学会等名 東北結び目セミナー2023
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------