

令和 6 年 6 月 24 日現在

機関番号：32689

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20337

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の孤立波の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis on solitary waves for nonlinear dispersive equations

研究代表者

林 雅行（Hayashi, Masayuki）

早稲田大学・理工学術院総合研究所（理工学研究所）・その他（招聘研究員）

研究者番号：60967850

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：空間遠方で代数的な減衰をするソリトン（代数ソリトン）が現れる非線形分散型方程式を主に研究し、孤立波の安定性・不安定性の理論構築、変分法を用いた進行波解の構成、エネルギー空間および高階のエネルギー空間における解の構成を行った。代数ソリトンを系統的に取り扱える数学モデルの研究では非線形解析と線形的作用素論との深い関連性が明らかになり、物理モデルの研究では先行研究では捉えられていなかった数学的構造を新たに見出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数ソリトンの安定性・不安定性に関する成果は、新たな数学的知見を与えているだけでなく、代数ソリトンにまつわる数理の豊穡さを示唆しており、今後の更なる理論発展が期待される。物理モデルに対する進行波解の構成やコーシー問題の可解性の成果は、より複雑な解の大域挙動の解明や新たな物理現象の発見に繋がる可能性を秘めており、こちらも今後の発展が期待できる。

研究成果の概要（英文）：We have mainly studied nonlinear dispersive equations which possess algebraically decaying solitons (algebraic solitons), and established stability/instability theory of solitary waves, constructed traveling wave solutions by variational methods, and constructed solutions in energy spaces and higher energy spaces. The research into mathematical models that can systematically handle algebraic solitons has revealed a deep connection between nonlinear analysis and linear operator theory, and the research into physical models has enabled us to discover new mathematical structures that had not been captured in previous literature.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 非線形シュレディンガー方程式 孤立波 進行波 代数ソリトン 不安定性 コーシー問題 エネルギー空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式は波の分散性と非線形相互作用との競合により、超流動・水面波・プラズマ・光ファイバー中の超短波といった様々な物理現象を表現することができる。代表的なものとしては非線形シュレディンガー方程式(NLS)やKdV方程式が挙げられる。

非線形分散型方程式には孤立波(ソリトン)と呼ばれる速さや形を変えずに伝播する特徴的な波が存在する。孤立波は方程式の線形項と非線形項との相互作用の釣り合いにより現れる波で、その詳しい解析は方程式の数学的構造を探る上で非常に重要になる。実際、孤立波の重要性を明示的に示す大きな予想としてソリトン分解予想(soliton resolution conjecture)というものが知られている。これは非線形分散型方程式の「多く」の解は時間が十分経過したあとは、いくつかのソリトンの重ね合わせと自由解の和で表現できるというものである。すなわち一般解の時間大域挙動を構成する1ピースとして孤立波が現れることを謳っている。ソリトン分解予想は限定的な方程式に対しては数値計算の結果を含めてある程度正しいことが示されているが、数学的に厳密な証明は多くの重要な方程式で未解決な問題となっている。この予想の完全な解決は現在の数学の遙か先にあるように思われるが、孤立波近傍の時間大域挙動を解明することがこの問題を考える上で最初の重要なステップとなる。複数の孤立波どうしの相互作用を調べる研究においても、一つの孤立波近傍の詳細な解析がやはり本質的な役割を果たす。

研究代表者はこれまでの研究で、非線形分散型方程式における孤立波を数学的に解析し、特に空間遠方で減衰が遅い孤立波(代数ソリトン)に焦点を当てて研究を進めてきた。代数ソリトンは近年の研究で重要性が次第に認識されてきているが、通常の空間遠方で指数的な減衰をもつ孤立波と比べて解析に様々な困難をもたらす、安定性や不安定性といった基本的な問題を含めて未解決な問題が多い状況であった。

2. 研究の目的

非線形分散型方程式の孤立波、特に代数ソリトンを中心に解析し、その背後にある方程式の数学的構造を詳細に調べ、新たな数学的知見を見出すことを目指す。上記の背景にあるように、孤立波の数学解析は解が持ちうる様々な挙動(ダイナミクス)を解明することと密接に関連している。代数ソリトンはいくつかの重要な物理モデルで現れることが知られており、豊富な数学的構造をもつ偏微分方程式から現れることが多い。ここでは代数ソリトンを系統的に取り扱うため、物理的設定には限定せず、数学的に適切に一般化した状況で解析していく。

3. 研究の方法

研究代表者は本研究課題の実施期間中、ピサ大学と早稲田大学の二つの研究機関を拠点としており、国内外の非線形分散型方程式の専門家と定期的に打ち合わせを行い、共同研究を進めていった。得られた成果は論文に纏め、国内外の研究集会で成果を発表し、聴講者と議論を行うことで知見の整備や最新の情報収集も行った。

本研究課題で取り扱う主要な方程式は、微分型相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式(微分型NLS)、二重冪相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式(二重冪NLS)および対数型相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式(対数型NLS)とする。これらの方程式は何れも孤立波の構造が豊かであり、物理モデルとしての側面があり、他の非線形分散型方程式との関連としても重要である。また前者二つの方程式は空間遠方で指数減衰する孤立波と代数ソリトンの二種類の孤立波が共存することが知られている。

4. 研究成果

(1) 二重冪NLSの定常解の不安定性(深谷法良氏との共同研究)

二重冪NLSには空間遠方で指数減衰する定在波と代数的な減衰をする定常解の二つの孤立波が存在する。定常解は通常の定在波と比べて性質が大きく異なり、解析も難しい。安定性/不安定性に関しては線形化作用素のスペクトルの観点から一般論にのせることができず、特に正の周波数をもつ定在波の場合と異なり、線形化作用素の強圧性がエネルギー空間の枠組みで成り立たないことが主要な難しさとなる。

本研究ではまず、周波数でパラメータ付けされた定在波の族に対して、零周波数における片側導関数をODE的手法で構成し、その遠方における最適な減衰度/増大度を導出した。次にこの片側導関数を用いて、定在波の不安定性の一般論と整合する不安定方向を構成し、変分的特徴付けとリャプノフ汎関数の議論を経由して定常解の不安定性を証明した。エネルギー空間に属さない片側導関数を適切に局所化し、線形化作用素の強圧性の代わりに定常解の変分的特徴付けを

応用することが解析の重要なポイントである。一次元の場合は最適と期待される条件のもとで定常解の不安定性を証明することに成功した。解析の全体的な流れは多次元にも適用できるが、いくつか技術的な問題点が現れ、その一部は今後の課題として残されている。完全に整備できた一次元の場合を一先ず論文に纏め、現在、学術雑誌に投稿中である。

上記の片側導関数の構成は線形化作用素のレゾルベントを用いて表現することもできる。この観点から考察することにより、代数ソリトンの解析は臨界減衰をもつポテンシャル付き線形シュレディンガー作用素の理論と密接な関連性があることが分かった。このことは代数ソリトンにまつわる数理の豊穡さを示唆しており、今後の更なる理論発展が期待できる。

(2) NLS の連立系における進行波解 (深谷法良氏と成亥隆恭氏との共同研究)

2021 年度の後半から研究していた NLS の連立系における進行波の研究を継続して行った。これまでの研究では、変分法を用いて周波数と速度の二つのパラメータに依存する進行波解の族を構成し、進行波の族の中には代数ソリトンに相当するものが現れることが分かっていた。本研究ではこれらの解析をより整備し、進行波解の構成と大域可解性への応用を一つの論文に纏めた。この論文は Math. Ann. に掲載受理され、現在は出版されている。また進行波の変分問題をさらに考察することで、エネルギー臨界の問題が現れること、プロファイルの楕円型方程式から非局所的な問題が現れることなど、いくつか興味深い観点を発見した。

(3) 対数型 NLS におけるコーシー問題 (小澤徹氏および Rémi Carles 氏との共同研究)

対数型 NLS のコーシー問題を考え、エネルギー空間および高階のエネルギー空間における強解の一意存在を証明した (小澤徹氏と共同研究)。対数型の非線形項は原点における特異性のため、局所リップシツ条件を満たさず、分散性による平滑化効果に基づいた不動点定理の援用では解を構成することができない。ほとんどの先行研究ではコンパクト性に基づいた方法で解の構成がなされていたが、本研究では Cazenave-Haraux が発見した不等式を自然に一般化し、近似解がコーシー列であることを示すことにより強解を構成した。この方法は従来のコンパクト性の方法と比べて初等的な議論であるというだけでなく、近似解の部分列を取ることなく極限先の解の存在を示すことができるという利点もある。また証明における可解性の議論は、非線形項の係数の正負によって状況が異なることを捉えており、これは先行研究の重み付きソボレフ空間における可解性の議論ではみられなかったことである。実際、関数の空間遠方における減衰度の対数オーダーの違いが重み付きソボレフ空間とエネルギー空間に差異を与えていることが分かっており、この空間の違いが方程式の可解性の議論に影響を与えるのは自然なことと思われる。可解性の議論で得られたこのような知見は、多重ソリトンの構成や安定性、ソリトン同士の衝突といった複雑な解の大域挙動を解明する際にも重要な視点になることが期待される。得られた結果は一つの論文に纏め、Ann. Henri Poincaré に掲載受理された。

上記の結果を arXiv に投稿した後、Rémi Carles 氏が共同研究者に加わり、低い正則性をもつソボレフ空間における可解性を証明した。より詳細には、 L^2 解の意味付けを与え、 H^1 解におけるリップシツフローの一意拡張として L^2 における適切性を証明し、さらに中間の指数にあたるソボレフ空間の正則性も証明した。これらの結果を纏めた論文は、Pure Appl. Anal. に掲載受理された。

(4) 一般化微分型 NLS における大域可解性 (小澤徹氏および Nicola Visciglia 氏との共同研究)

トラス上の一般化微分型 NLS において、高階のエネルギー空間における大域可解性を証明した。この結果は Ambrose-Simpson (2015) にあった未解決問題の解決に相当する。高階のエネルギーを方程式と部分積分を使って計算していき、Gronwall の議論で問題になる項を抽出し、それらを相殺するような修正エネルギーを構成することが証明の鍵となる。得られた結果は一つの論文に纏め、現在、学術雑誌に投稿中である。

今回得られた修正エネルギーの関係式は可積分系の微分型 NLS における高階のエネルギー保存則と自然な対応関係を与えている。このことは可積分系と非可積分系の比較という大きなテーマにおいて興味深い知見を与えており、今後の発展が期待できる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fukaya Noriyoshi, Hayashi Masayuki, Inui Takahisa	4. 巻 388
2. 論文標題 Traveling waves for a nonlinear Schrodinger system with quadratic interaction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1357 ~ 1378
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-022-02555-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Remi Carles, Masayuki Hayashi, Tohru Ozawa	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Low regularity solutions to the logarithmic Schrodinger equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masayuki Hayashi, Tohru Ozawa	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 The Cauchy problem for the logarithmic Schrodinger equation revisited	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 8件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 深谷法良、林雅行、戌亥隆恭
2. 発表標題 Traveling waves for a nonlinear Schrodinger system with quadratic interaction
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masayuki Hayashi
2. 発表標題 Traveling waves for a nonlinear Schrodinger system with quadratic interaction
3. 学会等名 Workshop on recent progress in standing waves for nonlinear Schrodinger equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masayuki Hayashi
2. 発表標題 Instability of stationary solutions for double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 Workshop "Nonlinear Waves and Hamiltonian PDE's" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 深谷法良、林雅行
2. 発表標題 1次元における2重べき型非線形シュレディンガー方程式の定常解の不安定性
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masayuki Hayashi
2. 発表標題 Traveling waves for a nonlinear Schrodinger system with quadratic interaction
3. 学会等名 Analysis Seminar, Seminar i MAP (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masayuki Hayashi
2. 発表標題 Modified energies for the generalized derivative NLS
3. 学会等名 Incontri di Analisi Matematica tra Firenze, Pisa e Siena (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masayuki Hayashi
2. 発表標題 Modified energies for the generalized derivative NLS
3. 学会等名 A three-day Dispersive Meeting in Pisa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 林雅行
2. 発表標題 Modified energies for the generalized derivative nonlinear Schrodinger equation
3. 学会等名 分散型方程式研究会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 林雅行
2. 発表標題 Global H^2 -solutions for the generalized derivative NLS on the torus
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 林雅行
2. 発表標題 Global H^2 -solutions for the generalized derivative NLS on the torus
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

本研究課題において得られた成果を纏めた論文2編（学術雑誌へ投稿中）をウェブ上で公開している。

Noriyoshi Fukaya and Masayuki Hayashi, Instability of stationary solutions for double power nonlinear Schrodinger equations in one dimension, preprint (2023). <https://arxiv.org/abs/2304.14337>

Masayuki Hayashi, Tohru Ozawa, and Nicola Visciglia, Global H^2 -solutions for the generalized derivative NLS on T , preprint (2024). <https://arxiv.org/abs/2406.06229>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
イタリア	Universita di Pisa		
フランス	Universite de Rennes	CNRS	