様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月２７日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2022～2023
課題番号：２２K２０３４３

研究課題名（和文）グラフの構造的理論と彩色理論が交差するフロンティアの開拓

研究課題名（英文）Developing the frontier where coloring theory and structural theory of graphs intersect

研究代表者
林　興養（Hayashi, Koyo）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教

研究者番号：４０９６３５５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：グラフの連結度や染色数などの大域的なパラメータがグラフの部分構造に与える直接的な影響を探るため，点素パス問題の既知の結果を拡張したグラフ構造定理の構築，その定理の彩色予想の部分問題への適用，及び，予想の解決に向けた新たな方向性の提案に関する研究を行なった．並行して，二部グラフの完全マッチングに対する既知の代数的アルゴリズムの理解の深化，及び，束論における部分束と極大鎖グラフの凸性に対する古典的定理の拡張に関する研究を行なった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
グラフ彩色問題とは与えられたグラフの頂点をできるだけ少ない数の色で塗り分ける問題であり，効率的な解法がないだろうと信じられている難しい問題である．平面描画できるグラフが4色で塗り分けられることを主張する四色定理のように，グラフの構造と彩色理論の間には関係があることが知られているが，それについて問いかけた彩色予想は現在も多くのものが未解決である．本成果は，その位相・構造的なグラフ理論と彩色問題の計算困難性の理論の両分野が交差する領域を探るものとして位置づけられる．

研究成果の概要（英文）：In order to explore the direct effects of global parameters such as the connectivity and the chromatic number of graphs on its sub-structures, we have constructed a graph structural theorem that extends known results on the vertex-disjoint paths problem, applied it to the sub-problem of a coloring conjecture, and proposed a new direction for resolving the conjecture. In parallel, we have deepened our understanding of known algebraic algorithms for perfect matchings on bipartite graphs, and extended a classical theorem on sub-lattices and convexity of graphs of maximal chains in lattice theory.

研究分野：数理情報学

キーワード：グラフ　彩色　細分・マイナー　アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

構造的グラフ理論とは，グラフの連結度や染色数などの大域的なパラメータがグラフの部分構造に与える直接的な影響を扱う理論体系であり，中でも 1980 年代初めに Robertson-Seymour により提唱されたグラフマイナー理論は，計算機科学，トポロジー，数学基礎論など多くの分野に影響を与えている．与えられたグラフ上で指定された k 組の頂点対を点素パスで結ぶ「k-点素パス問題」は一般には NP 困難であるが，k を定数とみなしたときには多項式時間で解けることがグラフマイナー理論の副産物として示され，VLSI のデザインへの応用とともに大きな関心を集めた．1930 年代中頃に，Wagner は，平面的グラフが 4 彩色可能であることを主張する「四色問題」をマイナーの視点から解決しようと試みる過程で，5 頂点完全グラフ K_5 のマイナーを含まないグラフの構造を特徴付ける分解定理を得た．四色問題自体は 1977 年のコンピュータを用いた証明により解決されたが，Wagner の視点に基づいて四色問題を拡張した Hadwiger 予想や Hajós 予想といった彩色予想は，現代の重要な未解決問題の一つとされている．

２．研究の目的

四色定理は，グラフの 4 彩色可能性が平面性というグラフ構造の位相的性質によって導かれることを主張する．しかし，NP 困難なグラフ彩色問題において，グラフの構造がどのように効いてくるかについては，上述の彩色予想に示唆されるように，未解明なことが多い．本研究の目的は，位相・構造的なグラフ理論と彩色問題の計算困難性の理論の両分野のフロンティアが交差する領域を開拓することである．

３．研究の方法

k 点素パス問題に対する陽な構造的特徴付けは一般には未解決であるが，k=2 の場合，解が存在しないグラフの構造は，1980 年の Thomassen，Seymour，Shiloach の「2-パス定理」によって，ある制約下で平面埋め込み可能なグラフとしてよく理解されている．この定理の拡張として，指定された 4 頂点を分岐点とする特定のグラフの「細分」(= そのグラフの各辺を内素パスで置き換えたグラフ)が存在するための条件を問う「4 点上の根付き細分問題」について調べる．この問題は，2-パス定理の一歩先の拡張として基本的な課題であり，かつ，「K_5の細分を含まないグラフが 4 彩色可能である」ことを主張する Hajós 予想においても重要な部分問題となる．

４．研究成果

(1) K_5の部分グラフに同相な根付き細分

高々4 頂点(= ターミナル)を根とする細分であって，K_5の部分グラフに同相なものを得る構造定理を得た．ここで考えている根付き細分とは，K_4^-(4 頂点完全グラフから辺を削除したグラフ)，$K_{2,3}^+$(完全二部グラフ $K_{2,3}$ においてサイズ 2 の color class の頂点間に辺を一つ挿入したグラフ)，及び，K_5^-(5 頂点完全グラフから辺を一つ削除したグラフ)の細分であって，指定したターミナルを分岐点として含むものである．今回得た構造定理は，グラフに内 4 連結(internally 4-connected)性という軽度な連結度を仮定し，かつ，ターミナルに対して 2-パス定理と同じ非平面性の仮定　(ターミナルが円周上に並ぶようグラフを円盤上に平面描画可能でないという条件)を置くと，上述の K_5 の部分グラフに同相な根付き細分のいずれかが存在することを主張する．

証明は，「tripod」と呼ばれるグラフ細分を利用した構成的なものである．Tripod は，グラフマイナー理論を展開する際に Robertson-Seymour によって導入され，2-パス定理や根付きグラフマイナー問題で中心的な役割を果たした．Tripod は最大次数が 3 であるのに対し，今回扱った細分は次数 4 の頂点を含む．最大次数が 4 以上の細分は，マイナーとは本質的に異なり，構成することが比較的難しい対象である．本成果は，最大次数 4 のグラフ細分を構成する際に，最大次数 3 の tripod をフレームとして活用できることを示す珍しい例であると言える．

これまでの根付き細分に関する研究(e.g，McCarty-Wang-Yu 2020，Yu 1998)では，高い連結度

やグラフ全体の平面性を仮定するものが多く，実際の彩色予想に対して直接利用できる結果はほとんどなかったが，本研究では，内 4 連結性というより弱い仮定のもと，4 頂点上の根付き細分を構成することに成功した．これにより，Hajós 予想への応用が期待できる．実際，Yu-Zickfeld (2006)は，Hajós 予想の位数最小の反例が 4 連結であることを示し，He-Wang-Yu (2020)は，5 連結な非平面グラフが K_5 の細分を含むことを主張する Kelmans-Seymour 予想が正しいことを示した．これは，Hajós 予想の最小反例の連結度はちょうど 4 であることを意味し，したがって，内 4 連結性という仮定で K_5 の部分グラフに同相な 4 頂点上の根付き細分を見つける問題は，最小反例の構造の特定のために自然に現れる部分問題である．

前述の部分問題に本成果を適用することにより，次なるステップとして，「fan+」と呼ばれる 4 頂点上の根付き細分を構成することが Hajós 予想において重要な部分問題となることが判明した．この問題は，ターミナルの 4 頂点のうち，指定した 2 点を通るサイクルと残りの 2 点を通るパスであって互いに素なものが存在するかどうかを問う問題とほとんど等価である．これは，構造的グラフ理論の観点から見ても，2-パス定理の拡張として興味深い問題である．解がないグラフの連結度に上界がある(高々10 である)ことは知られている(Thomas-Wollan 2008)が，その構造定理をより低い連結度の仮定のもと得ることが，今後の重要な課題になると予想される．

(2) 行列スケーリングによる二部グラフ上の Hall blocker の発見

与えられた非負行列に対し，左右からうまく正の対角行列をかけることで二重確率行列にできるかどうかを問う問題を行列スケーリング問題という．これは，与えられた二部グラフの辺の有無によって{0,1}の値を取るように定めた行列を入力と考えると，その二部グラフ上に完全マッチングがあるかどうかを判定する問題となる．

行列スケーリング問題に対する古典的な Sinkhorn のアルゴリズムによって二部グラフの完全マッチングの存在性を $O(n^2 \log n)$時間で判定することができることは，Linial-Samorodnitsky-Wigderson (2000)の成果によって知られていた．一方，完全マッチングが存在しないときの証拠となる Hall blocker と呼ばれる頂点部分集合を見つけられるかどうかは不明であった．これに対し，Sinkhorn のアルゴリズムが同じ $O(n^2 \log n)$時間で Hall blocker を計算することを明らかにした(平井広志氏と坂部圭哉氏との共同研究)．また，$O(n^6 \log n)$時間で，Sinkhorn のアルゴリズムにより，パラメトリックな設定の Hall blocker の計算，及び，収束先の行列のブロック構造を得ることが可能であることを示した．

(3) Semi-modular 束の二つの flag が生成する antimatroid

Modular 束において二つの flag(極大鎖)が生成する部分束が分配束をなすという古典的な事実は，その分配束が，flag がなすグラフにおける最短パス(=shortest gallery)の和集合と対応するものとして深く理解されている．Abels (1991)の成果により，semi-modular 束においてはそのような対応は成り立たないことが知られていたが，部分束の解釈を広げることでこの定理のアナロジーが semi-modular 束の場合でも成り立つことを示した(平井広志氏との共同研究)．具体的には，modular 束において部分束が二つの flag によって生成される過程に注目し，semi-modular 束において，ランクの modular 等式を満たす要素の組に対してのみ join と meet を加えることを繰り返すことで得られる「modular 凸包」という概念を導入した．Semi-modular 束においては，二つの flag によって生成される modular 凸包は，ある union-closed な集合族に半順序集合として同型であり，その極大鎖を集めたものが antimatroid をなすこと，そして，その antimatroid が，semi-modular 束における flag がなすグラフにおける最短パスの和集合に対応するものであることを示した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Koyo Hayashi, Hiroshi Hirai	４．巻 -
２．論文標題 Two Flags in a Semimodular Lattice Generate an Antimatroid	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Order	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11083-023-09639-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 Koyo Hayashi, Hiroshi Hirai, Keiya Sakabe	４．巻 -
２．論文標題 Finding Hall Blockers by Matrix Scaling	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Mathematics of Operations Research	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1287/moor.2022.0198	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 林 興養
２．発表標題 4頂点完全グラフの根付き細分問題
３．学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2022（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関