様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2022～2023
課題番号：２２Ｋ２０３４５

研究課題名（和文）拡散構造を持たない消散型波動方程式に対する大域可解性の理論の新展開

研究課題名（英文）New Developments in the Theory of Global Solvability for Damped Wave Equations without Diffusion Structure

研究代表者
喜多　航佑（Kita, Kosuke）

早稲田大学・理工学術院・講師（任期付）

研究者番号：５０９６２４４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では，波動方程式と消散型波動方程式の連立系の初期値問題の大域適切性の証明を目標に主に消散型波動方程式の解の評価について研究を行った．消散型波動方程式は波動方程式と同じ双曲型方程式に分類されるが，消散効果によりその解の性質は放物型方程式の代表である拡散方程式に近いことが知られている．ここでは，消散型波動方程式が持つ波動的性質の本質を探索する為，解の時空重み付き評価を新たに導出し，上述の連立系の初期値問題に対し新たな大域適切性の結果を部分的に得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題では，これまで独立に発展してきた放物型方程式と双曲型方程式に対してその違いの本質を見るべく，両者の性質を併せ持つ消散型波動方程式に対しその解の時空重み付き評価に着目して解析を行った．消散型波動方程式の解析はエネルギー散逸の構造に着目した放物型的なアプローチが主流だったが，本研究ではある種双曲型的なアプローチを採用し解の性質を特徴付けることに成功した．このような見方は独自のものであり，現象の時間発展を記述する様々な数理モデルの解析に応用できることが期待される．

研究成果の概要（英文）：In this research project, the estimate of solutions to the damped wave equation was mainly studied to prove the global well-posedness of the initial value problem for a coupled system of the wave equation and the dissipative wave equation. Although the wave equation with damping is classified as a hyperbolic equation like the wave equation, it is known that the properties of its solution are similar to those of the diffusion equation, which is a representative parabolic equation, due to the dissipation effect. In order to explore the essence of the wave-like properties of the damped wave equation, a new space-time weighted estimate of the solution is derived, and a new global well-posedness is partially obtained for the initial value problem of the coupled system mentioned above.

研究分野：函数方程式論

キーワード：消散型波動方程式　双曲型偏微分方程式　中尾の問題　臨界指数　大域適切性

１．研究開始当初の背景

消散型波動方程式は有限伝播性を考慮した熱の拡散現象やエネルギー損失を伴う電磁波の伝播現象を記述する数理モデルであり，物理学や工学の幾つかの文脈で現れる基礎方程式の一つである．数学的に (偏微分方程式の分類として) は，消散型波動方程式は波動方程式に代表される双曲型方程式と見做されるが，その解が時間無限大の極限で放物型方程式の代表である熱方程式の解に漸近するという性質 (解の拡散現象) を有するという点である意味双曲型方程式と放物型方程式の中間に位置していると捉えることが出来る．放物型方程式も双曲型方程式も時間発展を記述する方程式であり，その初期値問題の適切性の証明は多くの場合，線形項を主要部と見做し，非線形項をその摂動として捉える発展方程式の見方をする函数解析的手法に依る．さらに，大域適切性の証明の鍵となるのは，主要部が生成する半群の成す減衰評価や方程式に付随するエネルギーの評価などの不等式である．このような取り扱いは時間発展する偏微分方程式に共通であるが，一方で放物型方程式と双曲型方程式は相異なる性質を持つことも知られている (例えば放物型は無限伝播性，双曲型は有限伝播性等)．上述のように消散型波動方程式は双曲型方程式と放物型方程式の性質を併せ持っているので，その数学解析を通じて消散項の強さに応じた放物型性の獲得メカニズムを明らかに出来るのではないかと思い本研究の着想に至った．

また，従来の消散型波動方程式の解析は消散項のもたらす放物型性に着目したエネルギー散逸の構造 (拡散構造) に立脚した方法論が主流であるが，消散型波動方程式の持つ双曲型性の本質 (波動構造) はこの手法では不明瞭である．従って，波動方程式に対して有効な手法が消散型波動方程式に対してどこまで本質的に効いてくるかを明らかにする必要があるが，そのような観点の研究はあまり行われてきていない．

２．研究の目的

前述の背景を踏まえ本研究では中尾の問題と呼ばれる波動方程式と消散型波動方程式の連立系の初期値問題について考察する．特に中尾の問題の臨界指数を明らかにする．未知函数の絶対値の冪乗の非線形項を持つ単独の非線形消散型波動方程式は，時間大域解の存在・非存在を隔てる臨界指数の観点からは同種の非線形熱方程式 (藤田方程式) と同じ構造を持っていると言えその意味で放物型的である．従って，中尾の問題に対する臨界指数は，波動方程式同士の連立系に対する臨界指数と熱方程式同士の連立系に対する臨界指数の間に位置することが予想され，両者からどれだけずれているかを測ることで消散項の影響を捉えることが出来ると考えられる．

また，上述のように消散型波動方程式に対しては，波動方程式に対して有用であった方法論がどこまで通用するか分かっておらず，消散型波動方程式の持つ双曲型性を抽出する道具がない．これらのことを踏まえて，本研究の目的は，波動構造に立脚した解析の理論・道具・技法の開発を行い，従来の拡散構造に比重を置いた研究と合わせてその全体像を見直し，拡散構造と波動構造のなす階層を理解することが本研究の目的である．

３．研究の方法

本研究課題は主に研究代表者一人によって遂行される予定であったが，一部イタリアのピサ大学の V. Georgiev 教授と議論しその共同研究となった．当科研費を用いて実際にイタリアに行き，対面で議論したことで研究が大幅に進展した．渡航期間以外も定期的に Zoom を用いたオンライン打ち合わせを行った．

科研費使用の観点では，上記の他に国内外問わず各種研究集会やセミナーへ参加し，積極的に国内外の研究者と交流し，議論を通じて自身の研究課題遂行の糧とした．特に，上述の背景にあるように双曲型方程式と放物型方程式という異なる分野を牽引するそれぞれの研究者と有益な議論を行ったことで，後述の重み付き評価に関する新しい知見を得た．

４．研究成果

(1) 空間 3 次元において，外力項付きの単独線形消散型波動方程式の解に対して放物型尺度に対応する時空変数の重み付きの各点評価を導出した．不等式の形としては Narazaki-Nishihara (2008) のものと同様だが重みの指数が一部先行研究を拡張したものになっている．この評価を非線形消散型波動方程式に応用すると Nishihara (2003) や Hosono-Ogawa (2004), Todorova-Yordanov (2001), Ikehata-Tanizawa (2005) で知られているように，藤田優臨界の場合に小さな初期値に対して時間大域解が構成できる．そのとき得られる大域解は上で述べた重みに対応する減衰を持つことが分かる．

(2) 空間 3 次元において，(1) と同様の方程式に対し解のデュハメル項の評価に波動方程式に解析において重要となる $|t-|x||$ の重みを入れた各点評価を導出した．この評価は (1)の拡張になっている．この形の評価を消散型波動方程式の解に対して得た結果はこれが初めてであり，消散型波動方程式の持つ双曲型性 (波動性) を不等式の観点から明らかにした重要な結果であ

る．証明は解の明示的表現を用いて，右辺に所望の時空重み付き sup ノルムを取り出し，残りの部分から減衰及び可積分性を示す方法であり，フーリエ変換や L^p-L^q 評価を用いない初等的な手法である．

(3) 研究目的で述べた中尾の問題に対して (2) で得られた評価を応用することで部分的ではあるが，時間大域解の存在について示すことが出来た．特に Wakasugi (2017), Chen-Reissig (2021), K.-Kusaba (2022) によって導出された有限時間爆発解（時間大域解の非存在）の十分条件に現れる指数が一部臨界指数になっていることが分かった．この新たに発見された（部分的な）臨界指数は波動のものとも熱のものとも一致せずその間にあることから，研究目的にある消散項の影響を臨界指数の観点から捉えることに成功したと言える．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　7件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 喜多 航佑
２．発表標題 Weighted \$L^\infty\$ estimates for solutions to the damped wave equation in three space dimensions
３．学会等名 The Second One Day Workshop on Hyperbolic PDE in Kushiro（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 喜多 航佑
２．発表標題 Weighted \$L^\infty\$ estimates for solutions to the damped wave equation in three space dimensions and its application
３．学会等名 第15回実解析と函数解析による微分方程式セミナー（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 喜多 航佑
２．発表標題 A new weighted \$L^\infty\$ estimate for the damped wave equation in three dimensions
３．学会等名 秋田発展方程式小研究集会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 喜多 航佑
２．発表標題 3次元消散型波動方程式の解の重み付き各点評価について
３．学会等名 第１８９回神楽坂解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

1．発表者名 喜多 航佑
2．発表標題 3次元消散型波動方程式の解の重み付き各点評価について
3．学会等名 鳥取PDE研究集会2023（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Kosuke Kita
2．発表標題 Weighted pointwise estimates for the damped wave equation in three dimensions
3．学会等名 International Workshop on “Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics”（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Kosuke Kita
2．発表標題 On a weighted estimate for the solution to the damped wave equation in 3D
3．学会等名 Workshop on Nonlinear Hyperbolic PDEs. On the occasion of 60th birthday of Professor Yi Zhou（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関