

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2011～2015

課題番号：23224003

研究課題名(和文)非線形発展方程式の凝縮現象と解の構造

研究課題名(英文)Concentration Phenomena and Structure of Solution for Nonlinear Evolution Equations

研究代表者

堤 誉志雄(Tsutsumi, Yoshio)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10180027

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 57,700,000円

研究成果の概要(和文)：非線形波動・分散型方程式に対して、中西はSchlagとともに、不安定な基底状態解の近傍から出発する解の大域的挙動を完全に決定することに成功した。従来、基底状態より高いエネルギー準位を持つ解については、ほとんど先行研究はなかったため大きな進展である。堤は吉川との共同研究により、形状記憶合金の等温Falkモデルに対して、2種類の不変測度を構成して比較した。岡本は東海林との共同研究で、張力重力波のストークスドリフトと呼ばれる現象を、数学的に解析するとともに数値計算により調べた。岡本と東海林は、張力重力波の場合でも、粒子運動の軌跡が閉曲線とならないことを複素函数論的な手法で証明した。

研究成果の概要(英文)：For nonlinear wave and dispersive equations, in collaboration with Schlag, Nakanishi succeeded in classifying the global behavior of any solutions starting near an unstable ground state. This is a breakthrough, because there were no results available before their papers. Tsutsumi, together with Yoshikawa, proved the existence of two invariant measures for the isothermal Falk model. One is the Gibbs measure and another is an invariant measure proposed by Kuksin. In collaboration with Shoji, Okamoto investigated the Stokes drift of surface gravity waves with surface tension. Okamoto and Shoji proved that the orbits of particles are not closed curves by the method of the complex analysis.

研究分野：函数方程式論

キーワード：非線形波動・分散型方程式 非圧縮性Navier-Stokes方程式 解の特異性と凝縮現象 Keller-Segel方程式 解の時間大域挙動 Gibbs測度 Stokesドリフト

1. 研究開始当初の背景

非線形発展方程式においては、“凝縮現象”とよばれる広い意味での特異性が解の大域的性質を決定することが多い。広い意味での特異性というのは、通常用いられるような、解の滑らかではない部分という意味ではなく、解が持つと期待される性質を阻害する可能性がある解の性質のことを意味する。従って、凝縮現象を統一的に扱う手法・理論の確立が望まれる。

2. 研究の目的

広い意味での特異性は解の何らかの量(たとえば、 $p$ 乗積分ノルムなど)が局所的に凝縮・集約することにより発生することが多い。本研究では、非線形波動・分散型方程式および反応拡散系方程式や非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を研究対象とし、解の凝縮現象によって代表される広い意味での特異性生成メカニズムを数学的に研究するとともに、それらの凝縮現象を数値シミュレーションする。

3. 研究の方法

凝縮現象は様々な解析学的分野において現れる、きわめて興味深い現象であり、理論的解析と数値計算による解析の双方の研究が重要である。その観点から、理論的には近年発展の著しい非線形波動・分散型方程式研究を通して開発された、フーリエ制限法、 $l$ -method および最小爆発解の議論を用いるとともに、数値シミュレーションを行う。

4. 研究成果

(非線形波動・分散型方程式)

まず、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴルドン方程式に対しては、不安定な基底状態の近傍から出発する解の大域的挙動について、ある条件の下で完全に分類した。基底状態よりエネルギー準位が低い解については、多数の先行研究があるが、基底状態の近くとは言え、エネルギー準位が高い場合の数学的研究はほとんどなかった。その点で、当該分野における大きなブレークスルーであると言える。また、周期境界条件の下で2次元 Zakharov 方程式の爆発解の存在を証明した。2次元ユークリッド空間における Zakharov 方程式に対しては、Glangetas and Merle が1994年に証明したが、周期境界条件の場合は未解決であった。今回は周期境界条件における Zakharov 方程式の非線形項評価に相当する、ほぼ最良の双線形評価を得ることにより爆発解の存在証明が可能となった。さらに、形状記憶合金の数値モデル方程式である等温 Falk モデルに対し、Gibbs 測度と Kuksin 流の不変測度を構成した。非線形波動・分散型方程式のような無限次元のシステムに対し不変測度を構成するのは、それ自身非常に興味深い問題であるだけでなく、Gibbs 測度と Kuksin 流の不変測度を比較

することにより、Kuksin 流の不変測度の問題点を明らかにした。また、非線形光学に現れる3階 Lugiato-Lefever 方程式に対し、グローバル・アトラクターの存在を研究した。元々の Lugiato-Lefever 方程式は減衰項と外力が付いた非線形シュレディンガー方程式であるが、3階 Lugiato-Lefever 方程式はそれに3階の分散項が加わった方程式であり、2階分散項より広い帯域の空洞ソリトンを記述する方程式と考えられている。ところが、3階分散項が付くため、エネルギー汎関数は主要部が正定値とならないので、解の時間大域挙動を制御するのに役に立たない。そこで、質量保存に対応する2乗可積分空間で解を構成し、その空間で時間大域挙動を研究するのが自然である。物理学者による数値シミュレーションから、3階 Lugiato-Lefever 方程式はグローバル・アトラクターを持つと予想されていたが、その証明はなかった。それは、3階 Lugiato-Lefever 方程式は初期値に関する解の連続依存性は $L^2$ 弱位相では成立しないため、弱コンパクト性を使うことができないので、既存のグローバル・アトラクターの存在定理を直接適用することができないからである。この問題に対し、3次非線形性の平滑化効果を調べ振動因子を除けば平滑化効果を持つことを示した。この結果は、グローバル・アトラクターの存在を示す際に有用なはずである。

(流体方程式と数値計算)

張力重力波のストークスドリフトと呼ばれる現象を数学的に解析するとともに数値計算によって調べた。張力重力波とは、水面が表面張力や重力によって振動するとき生じる波のことであり、古くから研究が行われてきた。渦なし粘性なしの非圧縮性流体の自由境界値問題に対し、線形化方程式を考えると、水面に乗っている粒子運動の軌跡は、近似的に楕円や円の閉曲線になる。しかし、波が小さくても2次の非線形性を無視することはできず、2次非線形性の効果により粒子は水平方向に移動する。これを、ストークスドリフトという。このことは、張力がない重力波の場合には2006年に Constantin によって証明されたが、その証明方法は張力重力波の場合には適用できなかった。今回は、張力重力波の場合でも適用できる証明を与えると同時に、Euler 座標系での数値計算を行った。また、3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関係した、移流項と非局所性を持つモデル方程式を考え、特異性生成メカニズムを調べた。さらに、やはり非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と関連した一般化 Prudman-Johnson 方程式の数値計算を行い、パターン形成や特異性生成メカニズムを数値的に調べた。さらに、2002年に Craik-Okamoto によって提唱された流体力学に関連した簡易モデルに対する予想を、計算機支援証明(精度保証付き数値計算)を用いることにより部分的に解決するこ

とに成功した。

( Keller-Segel 方程式 )

1970 年に Keller と Segel が細胞性粘菌の集中現象を記述するモデルとした提唱した、いわゆる放物型 - 放物型 Keller-Segel 方程式に対し、解が爆発するための自然な十分条件を与えることは、長年の未解決問題であったが、今回これに決着をつける結果を得た。放物型 - 放物型の方程式を単純化した、放物型 - 楕円型 Keller-Segel 方程式の爆発解については、多数の先行研究がある。しかし、放物型 - 放物型の場合、3 次元以上の領域に対しては Winkler が証明していたが、彼の証明方法は 2 次元には適用できなかった。今回、Trudinger-Moser 不等式とある種の単調性公式を組み合わせるにより、放物型 - 放物型 Keller-Segel 方程式の解が爆発するための十分条件を与えることに成功した。

( 双線形写像の有界性 )

2 次の非線形性は二つの関数の積で表されるので、双線形写像と見なすことができる。そのため、非線形偏微分方程式への応用を考えると、線形写像の有界性だけでなく双線形写像の有界性も重要である。今回、Morrey 空間におけるアトム分解を考え、双線形写像の有界性定理へ応用した。Morrey 空間は、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解空間として用いられるだけでなく、2008 年の Merle and Raphael の論文では、質量優臨界非線形シュレディンガー方程式の解が爆発するときには、スケール不変ノルムも爆発することを示すために用いられており、非線形偏微分方程式研究に重要な函数空間である。そのため、将来非線形偏微分方程式への応用が期待される。

5 . 主な発表論文等

( 研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線 )

[ 雑誌論文 ] ( 計 26 件 )

2015 年度

1. Y. Tsutsumi and S. Yoshikawa, Invariant measures for the isothermal Falk model of shape memory alloys, *Gakuto Intern. Ser., Math. Sci. Appl.*, 37 (2015), 163-182. ( 査読有り )
2. Y. Tsutsumi, Global existence of  $SL^2$  solutions of the Zakharov equations with additive noises, *RIMS Kokyuroku*, 1971 (2015), 135-143. ( 査読無し )
3. I. Bejenaru, Z. Guo, S. Herr and K. Nakanishi, Well-posedness and scattering for the Zakharov system in four dimensions, *Anal. PDE*, 8 (2015), 2029-2055. ( 査読有り )

4. J. Krieger, K. Nakanishi and W. Schlag, Center-stable manifold of the ground state in the energy space for the critical wave equation, *Math. Ann.*, 361 (2015), 1-50. ( 査読有り )
5. M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 40 (2015), 551-571. ( 査読有り )
6. S.-C. Kim and H. Okamoto, Unimodal patterns appearing in the Kolmogorov flows at large Reynolds numbers, *Nonlinearity*, 28 (2015), 3219-3242. ( 査読有り )
7. T. Miyaji, H. Okamoto and A.D.D. Craik, Three-dimensional forced-damped dynamical systems with rich dynamics: bifurcations, chaos and unbounded solutions, *Phy. D*, 311/312 (2015), 25-36. ( 査読有り )
8. T. Miyaji, H. Okamoto and A.D.D. Craik, A four-leaf chaotic attractor of a three-dimensional dynamical system, *Internat. J. Bifur. Chaos App. Sci. Engrg.*, 25 (2015), 1530003, 21 pp. ( 査読有り )

2014 年度

1. Z. Guo, S.-H. Lee, K. Nakanishi and C.-B. Wang, Generalized Strichartz estimates and scattering for 3D Zakharov system, *Comm. Math. Phys.*, 331 (2014), 239-259. ( 査読有り )
2. T. Miyaji and H. Okamoto, A computer-assisted proof of existence of a periodic solution, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 90 (2014), 139-144. ( 査読有り )
3. N. Kishimoto, Remark on the periodic mass critical nonlinear Schrodinger equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142 (2014), 2649-2660. ( 査読有り )
4. S. Gala, M.A. Ragusa, Y. Sawano and H. Tanaka, Uniqueness criterion of weak solutions for the dissipative quasi-geostrophic equations in Orlicz-Morrey spaces, *Applicable Analysis*, 93 (2014), 356-368. ( 査読有り )
5. Y. Tsutsumi, Strichartz estimate of the Schrodinger equation of fourth order with periodic boundary condition, *RIMS Kokyuroku*, 1914 (2014), 104-113. ( 査読無し )
6. N. Mizoguchi and P. Souplet, Nondegeneracy of blow-up points for the parabolic Keller-Segel system, *Ann. Inst. H. Poincare, Analyse Non Lineaire*, 31 (2014), 851-875. ( 査読

有り)

2013 年度

1. H. Okamoto, Blow-up problem in the strained vorticity dynamics and critical exponent, *J. Math. Soc. Japan*, 65 (2013), 379-403. (査読有り)
2. N. Masmoudi and K. Nakanishi, Multifrequency NLS scaling for a model equation gravity-capillary waves, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 66 (2013), 1202-1240. (査読有り)
3. T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, Atomic decomposition for Morrey spaces, *Zeitschrift für Analysis und Ihre Anwendungen*, 33 (2014), 149-170. (査読有り)
4. N. Kishimoto and M. Maeda, Construction of blow-up solutions for Zakharov system on  $\mathbb{T}^2$ , *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 30 (2013), 791-824 (査読有り).

2012 年度

1. J. Krieger, K. Nakanishi and W. Schlag, Global dynamics above the ground state energy for the one-dimensional NLKG equation, *Math. Z.*, 272 (2012), 297-316. (査読有り)
2. S. Ibrahim, M. Majdoub, N. Masmoudi and K. Nakanishi, Scattering for the two-dimensional NLS with exponential nonlinearity, *Nonlinearity*, 25 (2012), 1843-1849. (査読有り)
3. H. Okamoto and M. Shoji, Trajectories of fluid particles in a periodic water wave, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 370 (2012), 1661-1676. (査読有り)
4. S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, A new Beal-Kato-Majda criteria for 3D magneto-micropolar fluid equations in the Orlicz-Morrey space, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 35 (2012), 1321-1334. (査読有り)

2011 年度

1. A. Debussche and Y. Tsutsumi, 1D quantic nonlinear Schrödinger equation with white noise dispersion, *J. Math. Pures Appl.*, 96 (2011), 363-376. (査読有り)
2. T. Miyaji, I. Ohnishi and Y. Tsutsumi, Stability of a stationary solution for the Lugiato-Lefever equation, *Tohoku Math. J.*, 63 (2011), 651-663. (査読あり)
3. L. Aloui, S. Ibrahim and K. Nakanishi, Exponential energy decay for damped

Klein-Gordon equation with nonlinearities of arbitrary growth, *Comm. Partial Differential Equations*, 36 (2011), 797-818. (査読有り)

4. Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363 (2011), 6481-6503 (査読有り).

[学会発表](計 21 件)

2015 年度

1. Y. Tsutsumi, Four-fermion interaction approximation of the intermediate vector boson model, *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, 2015 年 7 月 27 日-31 日, エジンバラ(イギリス).(招待講演)
2. Y. Tsutsumi, Nonlinear smoothing and global attractor for KdV with damping and external forcing terms, *The 3rd CAU-Kyoto U. Joint Workshop on Nonlinear PDEs*, 2015 年 9 月 21 日-22 日, 済州島(韓国).(招待講演)
3. 岸本展, 非線形分散型方程式の解の無条件一意性について, 日本数学会 2015 年秋季総合分科会函数方程式論分科会(特別講演), 2015 年 9 月 13 日-16 日, 京都産業大学(京都).(招待講演)
4. T. Miyaji, Bifurcation analysis of the Lugiato-Lefever equation in one space dimension, *Workshop on Nonlinear Phenomena in Optics: Theory and Experiments*, 2015 年 11 月 4 日-5 日, ブザンソン(フランス).(招待講演)
5. K. Nakanishi, Global dynamics of the nonlinear Schrödinger equation with a potential, *Workshop 'Singularity Formation and Long Time Behavior in Dispersive PDEs'*, 2016 年 3 月 14 日-18 日, ボン(ドイツ).(招待講演)

2014 年度

1. Y. Tsutsumi, Four-fermion interaction approximation of the intermediate vector boson model, *Workshop on Harmonic Analysis and PDEs*, 2014 年 9 月 18 日-20 日, KAIST, Daejeon (Korea).(招待講演)
2. 堤誉志雄, 非線形発展方程式と確率効果, 偏微分方程式に付随する確率論的問題, 2014 年 9 月 16 日-18 日, 京都大学数理解析研究所(京都).(招待講演)
3. 中西賢次, ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の大域ダイナミクス, 第 4 回弘前非線形方程式研究会, 2014 年 12 月 5 日-6 日, 弘前大学(弘前).(招待講演)

2013 年度

1. Y. Tsutsumi, Global existence of

- solutions for 1D Zakharov equations with additive noises, International Workshop on Differential Equations and its Applications, 2013年7月26日-28日, 国立成功大学(台湾).(招待講演)
2. 溝口紀子, 非線形放物型方程式の爆発解, 日本数学会年会総合講演, 2014年3月15日-3月18日, 学習院大学(東京).(招待講演)
  3. H. Takaoka, Almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS, 9<sup>th</sup> International ISAAC Congress, 2013年8月5日-8月9日, Pedagogical University (Poland). (招待講演)
  4. K. Nakanishi, Multi-frequency NLS approximation for a water wave model equation, 第31回九州における偏微分方程式研究集会, 2014年1月27日-29日, 福岡大学メディカルホール(福岡).(招待講演)
  5. M. Maeda, On small energy stabilization in the NLS with a trapping potential, 第31回九州における偏微分方程式研究集会, 2014年1月27日-29日, 福岡大学メディカルホール(福岡).(招待講演)

#### 2012年度

1. Y. Tsutsumi, Gibbs measure for the isothermal Falk model, Partial Differential Equations in Osaka, 2012, 2012年8月20日-8月24日, 大阪大学工学部(吹田).(招待講演)
2. Y. Tsutsumi, Gibbs measure for the isothermal Falk model, Parabolic and Navier-Stokes Equations, 2012年9月2日-9月8日, Mathematical Research and Conference (Bedlewo). (招待講演)
3. 中西賢次, Scattering for the Zakharov system in the energy spaces, 非線形分散型方程式における最近の進展, 2012年5月21日-5月24日, 京都大学数理解析研究所(京都).(招待講演)
4. Y. Sawano, Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, 調和解析学と非線形偏微分方程式, 2012年7月2日-7月4日, 京都大学数理解析研究所(京都).(招待講演)

#### 2011年度

1. 堤誉志雄, Stability of cavity soliton for the Lugiato-Lefever equation, 仙台シンポジウム, 2011年8月8日-8月12日, 東北大学情報科学研究科(仙台).(招待講演)
2. 堤誉志雄, 1D quantic NLS with white noise dispersion, 偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的現象の解析, 2011年12月19日-12月

21日, 京都大学数理解析研究所(京都)(招待講演).

3. 堤誉志雄, Gibbs measures and nonlinear dispersion equations, Rough Path 解析とその周辺, 2012年25日-26日, 名古屋大学多元数理科学研究科(名古屋).(招待講演)
4. 中西賢次, ソリトンの中心安定多様体, 非線形双曲型および分散型方程式の研究, 2011年5月23日-5月25日, 京都大学数理解析研究所(京都).(招待講演)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
無し

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

堤 誉志雄 (Tsutsumi, Yoshio)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10180027

##### (2) 研究分担者

岡本 久 (Okamoto, Hisashi)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号: 40143359

中西 賢次 (Nakanishi, Kenji)  
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 40322200

澤野 嘉宏 (Sawano, Yoshihiro)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 40532635

岸本 展 (Kishimoto, Nobu)  
京都大学・数理解析研究所・講師  
研究者番号：90610072

(3)連携研究者

高岡 秀夫 (Takaoka, Hideo)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：10322794

溝口 紀子 (Mizoguchi, Noriko)  
東京学芸大学・教育学部・准教授  
研究者番号：00251570

前田昌也 (Maeda, Masaya)  
千葉大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：40615001

加藤孝盛 (Kato, Takamori)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・講師  
研究者番号：50620639

宮路智行 (Miyaji, Tomoyuki)  
明治大学・研究・知財戦略機構・特任講師  
研究者番号：20613342

佐々木洋平 (Sasaki, Youhei)  
京都大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：70583459