

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2011～2014

課題番号：23244017

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式の定性的理論と特異性の解析

研究課題名(英文)Qualitative theory of nonlinear partial differential equations and the analysis of singularities of

研究代表者

俣野 博(Matano, Hiroshi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：40126165

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 27,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、漸近的手法や無限次元力学系の理論を駆使し、非線形偏微分方程式の解の長時間挙動や安定性、および解に現れる特異性の研究を総合的な立場から行った。具体的には、以下のテーマに重点を置いた。(1) 種々の進行波と波面の広がり現象の研究 (2) 解の漸近挙動に関する定性的考察 (3) 非線形拡散方程式の特異極限と界面運動の研究  
これらのテーマには、非線形Stefan問題などの自由境界問題も含まれる。

研究成果の概要(英文)：In this research project, I made a systematic study of the long-time behavior and stability of solutions of nonlinear partial differential equations, and also singularities arising in those solutions, by using asymptotic methods and the theory of infinite dimensional dynamical systems. More specifically, I focused on the following topics: (1) Traveling waves and spreading fronts of various kinds; (2) Qualitative study of the long-time behavior of solutions; (3) Singular limit of nonlinear diffusion equations and the associated interface motion. These themes include free boundary problems such as the nonlinear Stefan problem.

研究分野：非線形解析学

キーワード：非線形偏微分方程式 定性的理論 進行波 界面運動 解の爆発 特異極限 自由境界問題

### 1. 研究開始当初の背景

ある種の実線形偏微分方程式においては、解に一種の特異性ないし擬特異性の「界面」が生じて空間内を伝播する現象が観察される。界面は、しばしば「進行波」という形で媒質の中を移動し、系の状態変化を周囲に伝達する役割を担う。この界面が生まれるプロセスを明らかにし、その運動の様子を調べることが、多くの複雑な非線形現象を理解する上での鍵となる。また、解が局所的に無限大に発散する「爆発現象」も複雑なパターンの中にしばしば観察される。これらの現象を解析するには、種々の漸近的手法に加えて、複雑な非線形ダイナミクスを大域的視点から理解する枠組みとしての無限次元力学系の理論が重要な役割を演じる。近年、こうした幅広い手法を駆使した非線形問題の研究の必要性が高まっている。

### 2. 研究の目的

本研究では、漸近的手法や無限次元力学系の理論を駆使し、さらに必要に応じて数値シミュレーションも併用しながら、非線形偏微分方程式の解の長時間挙動や安定性、および解に現れる特異性の研究を総合的な立場から行うことをめざした。具体的には、以下のテーマに重点を置いた。

- (1) 種々の進行波と波面の広がり現象
- (2) 解の漸近挙動に関する定性的考察
- (3) 拡散方程式の特異極限と界面運動

これらのテーマの概要を以下に述べる。

- (1) 種々の進行波と波面の広がり現象  
ここ数十年、空間非一様な媒質中の進行波への関心が高まり、世界各地で盛んに研究が行われている。しかしこれまでの研究は、主として単独方程式が対象であり、しかも比較的単純なケースに限られていた。本研究では、空間非周期的な場における進行波や、多重安定型方程式における波面の広がり運動など、これまで研究が進んでいない問題の解明を目指した。
- (2) 解の漸近挙動に関する定性的考察  
放物型方程式の解の漸近挙動については多くの研究があるが、退化した拡散方程式や非局所項を含む方程式については、研究があまり進んでいない。本課題研究では、こうした問題に取り組んだ。
- (3) 拡散方程式の特異極限と界面運動  
ある種の実線形拡散方程式においては、方程式内のパラメータを限りなく0に近づけた特異極限下で不連続な遷移層(界面)が現れる。拡散方程式の特異極限については多くの文献があるが、遷移層の生成の仕方や、遷移層付近での解のプロ

ファイルを詳細に評価したものは比較的少ない。本課題研究では、遷移層付近での解のプロファイルについて詳しい解析を試みた。

なお、本研究では、上記のテーマの他に、当初は細胞電気生理学における3次元モデルを扱う予定であった。しかし研究を始めた早い段階で、この問題と密接に関連し、しかも電気生理学の分野でより重要なバイドメインモデルについて新しい発見が得られる可能性が高まった。そこで研究の対象をバイドメインモデルに切り替えたが、これは偏微分方程式でなく擬微分方程式なので、本研究課題と切り離して、萌芽研究のテーマとして扱うことにした。

また、本研究では、非線形熱方程式の解の爆発現象も中心テーマの一つであった。実際、爆発問題についても精力的な研究を行い、ソボレフ臨界型の熱方程式について幾つかの重要な知見が得られたが、上に述べた他のテーマの研究に当初の予想を超える進展があったため、それらの研究をまとめる作業を優先して、解の爆発問題の研究は、平成28年度から開始した新しい課題研究に引き継ぐことにした。

### 3. 研究の方法

本研究では多くの問題を扱ったが、とくに進行波や界面運動の研究に重点を置いた。多くの場合、最大値原理、とりわけ強最大値原理が、解の定性的性質の解明に重要な役割を果たした。とくに空間1次元の場合には、最大値に基づく交点数非増大則と無限次元力学系の理論を組み合わせる手法が予想以上の威力を発揮した。後で述べる進行テラス解の研究と、曲線短縮流に対する自由境界問題の研究がその例である。通常の解析手法に加えて、無限次元力学系の視点を活用するのが本研究の特色である。

本研究は、海外の研究者との共同研究が多かったため、研究遂行にあたり、メール等での研究連絡に加えて、海外の研究者を招へいたり、海外の大学を訪れて緊密な連携をはかった。また、定期的に東京大学でセミナーを開くとともに、国際研究集会とサマースクールを毎年開催して関連分野や他分野の研究者との研究連絡を活発に進め、同時にわが国の若手研究者の啓発に努めた。

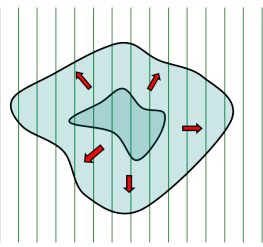
### 4. 研究成果

非局所項をもつ質量保存型方程式の長時間挙動: 非局所的な非線形項をもつ質量保存型の微分方程式を考え、解の極限集合の構造を調べた(文献)。この研究は、質量保存型 Allen-Cahn 方程式に対する特異極限問題と密接に関連しており、初期時刻の直後に起こる界面の生成現象の解明に役立つと期待される。

曲線の曲率運動方程式に対する自由境界問題：半平面  $y > 0$  上の駆動項付き曲線短縮流に対する自由境界問題を考えた。曲線の両端点は直線  $y=0$  の上を一定の接触角を保ちながら動く。本研究では、曲線の挙動が3種類に分類されることを示すとともに、それぞれの場合について解の挙動を詳しく解析した(文献)。

双曲空間上の非線形拡散方程式：双曲空間  $H^n$  上の非線形拡散方程式に現れる波面の広がり現象を考察し、ユークリッド空間の場合の結果と比較することで、空間の幾何学的性質が解の挙動にどのような影響を及ぼすかを調べた。また、ユークリッド空間の平面波に対応する概念として「ホロ球面波」という概念を導入し、その性質を調べた(文献)。

KPP 方程式における波面の広がり速度を最大化する問題：空間2次元のKPP型拡散方程式で非線形項の係数が空間周期的な帯状の非一様性を有するものを考え、波面の広がり速度を最大化する係数を決定する問題を考察した。その結果、速度を最大化する係数は関数のクラスには存在せず、等間隔に平行に並んだ直線族の上に台をもつ特異測度になることを示した(文献)。この結果を導く過程で、測度を係数にもつ拡散方程式の進行波に関する一般論を確立した。

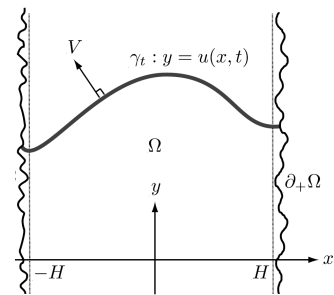


非線形 Stefan 問題の解の正則性と漸近挙動：空間多次元 KPP 型非線形拡散方程式に対する1相 Stefan 問題の自由境界の正則性と解の漸近挙動を論じた。具体的には、台が有界な初期値から出発した解の自由境界が必ず有限時間で滑らかになること、および、長時間経過後の自由境界が、次第に球面に近づくことを示した(文献)。

空間1次元非線形拡散方程式に現れる進行テラス解：空間周期的で多重安定な非線形項をもつ  $R$  上の半線形拡散方程式を考え、Heaviside 関数型の初期値から出発した解は、複数の波面が層をなして進む「進行テラス解」と呼ばれるものに近づくことを示した(文献)。

空間非周期的な媒質中の進行波：境界がノコギリの歯状をした2次元帯状領域における界面(曲線)の曲率運動方程式を考え、そこに現れる進行波の性質を調べた。その結果、境界の空間形状がエルゴード的であれば進行波の平均速度が存在することを示すと同時に、境界の形状がさらに非周期的な

場合には、平均速度が0という奇妙な進行波が存在し、この現象を“virtual pinning”と名付けた(文献)。



退化した拡散方程式が生成する無限次元力学系の研究：退化した拡散方程式の解の挙動は、非退化型方程式の解の挙動と大きく異なることはよく知られているが、これまでその違いを力学系の立場から扱った研究は少なかった。本研究では、porous medium 型の退化拡散方程式において、不安定平衡解  $u=0$  の不安定多様体のハウスドルフ次元が、たとえ有界領域の場合でも常に無限大であることを示した(文献)。

非線形拡散方程式の特異極限下に現れる遷移層の形状の研究：Allen-Cahn 型の非線形拡散方程式においては、ある種の係数を  $\epsilon$  に近づけた特異極限で不連続な界面が現れ、その運動が平均曲率流に支配されることが知られている。しかしながら、特異極限の近くで現れる急峻な遷移層の形状が、形式的漸近展開から予想される形状と一致するかどうかは、特殊なケースを除いて未解決であった。今回の研究で、実際の遷移層の形状が、1次近似のレベルでは形式的漸近展開と一致することを確かめた(文献)。

Allen-Cahn 型方程式の平面波の安定性：全空間  $R^N$  上の Allen-Cahn 型非線形拡散方程式に現れる平面波が、有界ではあるが必ずしも小さくない摂動に対して漸近安定であるかどうかを論じた。今回の研究では従前の結果を拡張し、空間的に一意エルゴード的な任意の摂動を受けた界面が、 $t \rightarrow \infty$  のとき平面波に一樣収束することを示した(文献)。

強順序保存力学系とスパイラル結晶成長：中村は強順序保存力学系のあるクラスにおける非有界な全軌道の性質を明らかにするとともに、得られた結果をスパイラル結晶成長のモデルを含む非線形放物型方程式に適用して、時間周期的なプロファイルを持つ非有界な時間大域解の一意存在および漸近安定性を示した(文献)。

KPZ 方程式の研究：舟木は、界面揺動を記述する Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程式を考察した。形式解の Cole-Hopf 変換を考えると、方程式は乗法的ノイズを持つ線形確率熱方程式に帰着されるが、その幾何的ブラウン運動の分布が不変測度であることを示した(文献)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計18件)

D. Hilhorst, H. Matano, T.N. Nguyen and H. Weber: On the large time behavior of the solutions of a nonlocal ordinary differential equation with mass conservation, **J. Dynam. Differential Equations**, 掲載確定 (査読有).  
[DOI:10.1107/s10884-015-9465-7]

J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu: On a free boundary problem for the curvature flow with driving force, **Arch. Rat. Mec. Anal.**, **219** (2016), 1207-1272 (査読有).  
[DOI:10.1107/s00205-015-0920-8]

H. Matano, F. Punzo and A. Tesei: Front propagation for nonlinear diffusion equations on the hyperbolic space, **J. Eur. Math. Soc.**, **17** (2015), no.5, 1199-1227 (査読有).  
[DOI:10.4171/JEMS/529]

X. Liang and H. Matano: Maximizing the spreading speed of KPP fronts in two-dimensional stratified media, **Proc. London Math. Soc.**, **109** (2014), no.5, 1137-1174 (査読有).  
[DOI:10.1112/plms/pdu031]

Y. Du, H. Matano and K. Wang: Regularity and asymptotic behavior of nonlinear Stefan problems, **Arch. Rat. Mec. Anal.**, **212** (2014), no.3, 957-1010 (査読有).  
[DOI:10.1007/s00205-013-0710-0]

A. Ducrot, T. Giletti and H. Matano: Existence and convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations, **Trans. Amer. Math. Soc.**, **366** (2014), no.10, 5541-5566 (査読有). [DOI:10.1090/S0002-9947-2014-06105-9]

B. Lou, H. Matano and K.-I. Nakamura: Recurrent traveling waves in a two-dimensional saw-toothed cylinder and their average speed, **J. Differential Equations**, **255** (2013), no.10, 3357-3411 (査読有).  
[DOI:10.1016/j.jde.2013.07.038]

H. Matano and M.A. Pozio: Dynamical structure of some nonlinear degenerate diffusion equations, **J. Dynam. Differential Equations**, **24** (2012), no.2, 124-149 (査読有).  
[DOI:10.1007/s10884-012-9246-5]

M. Alfaro and H. Matano: On the validity of formal asymptotic expansions in Allen-Cahn equation and FitzHugh-Nagumo system with generic initial data, **Discrete and Continuous Dynamical Systems (Ser. B)**, **17** (2012), no. 6, 1639-1649 (査読有).  
[DOI:10.3934/dcdsb.2012.17.1639]

H. Matano and M. Nara: Large time behavior of disturbed planar front in the Allen-Cahn equation, **J. Differential Equations**, **251** (2011), no.12, 3522-3557 (査読有).  
[DOI:10.1016/j.jde.2011.08.029]

K.-I. Nakamura and T. Ogiwara: Periodically growing solutions in a class of strongly monotone semiflows; **Networks and Heterogeneous Media**, **7** (2012), No. 4, 881-891 (査読有).  
[DOI:10.3934/nhm.2012.7.881]

T. Funaki and J. Quastel: KPZ equation, its renormalization and invariant measures, **Stoch. PDE: Anal. Comp.** 掲載確定 (査読有り).  
[DOI: 10.1007/s40072-015-0046-x]

[学会発表](計30件)

俣野 博: Propagation of a plant disease in some periodic medium; GDRI-ReaDiNet Workshop on Reaction Diffusion Systems Arising in Biology, 2015年12月17日, Nancy (フランス).

俣野 博: Front propagation in an anisotropic Allen-Cahn equation and the Fife-McLeod method; ICMMA2015 (「数学モデリングと応用」に関する国際会議), 2015年10月29日, 明治大学 (東京都中野区).

俣野 博: Front propagation in an anisotropic Allen-Cahn equation; International Symposium on Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Life Science, 2015年8月4日, 天津(中国).

俣野 博: Dynamics of order-preserving

systems with mass conservation; International Conference on Recent Advances in Mathematical Biology, Analysis and Applications, 2015年6月4日, Aligarh (インド).

侯野 博: Front propagation in a prey-predator type reaction diffusion system; Seoul-Tokyo Conference on "Applied Partial Differential Equations: Theory and Applications", 2014年12月13日, ソウル (韓国).

侯野 博: Front propagation in nonlinear diffusion equations and systems; 8<sup>th</sup> European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 2014年5月29日, Gaeta (イタリア).

侯野 博: Dynamics of a class of systems with an order-preserving property; CMC Inaugural Conference at KAIST, 2013年12月6日, Daejeon (韓国).

侯野 博: On a free boundary problem for the curvature flow with driving force; LIA conference on Mathematical Modelling and Analysis in the Life Sciences, 2013年6月12日, Carry-le-Rouet (フランス).

侯野 博: Propagating terrace in one-dimensional semilinear diffusion equations; Hale Memorial Conference on Dynamics of Differential Equations, 2013年3月17日, Atlanta (米国).

侯野 博: Front propagation in spatially ergodic media; UK-Japan Winter School "Nonlinear Analysis", 2013年1月7日, London (連合王国).

侯野 博: Propagating terrace in one-dimensional semilinear diffusion equations; Workshop on Dynamics of Patterns, 2012年12月17日, Oberwolfach (ドイツ).

侯野 博: Reversed blow-up profile in nonlinear heat equations; 5<sup>th</sup> Euro Japanese Workshop on Blow-up, 2012年9月14日, Luminy (フランス).

侯野 博: Front propagation in nonlinear diffusion equation on hyperbolic space; International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Applications, 2012年3月22日, Hammamet (チュニジア).

中村健一: Asymptotic study of front propagation in heterogeneous media; NTCs Workshop on Applied Mathematics, 2015年3月5日, 淡江 (台湾).

中村健一: A mathematical formulation of the discrete variational derivative method for dissipative systems; 8<sup>th</sup> European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 2014年5月27日, Gaeta (イタリア).

舟木直久: Sharp interface limit for mass conserving Allen-Cahn equation with stochastic term, Workshop on Mathematics and its Applications to Complex Phenomena Arising in Biology, Chemistry and Medicine", 2014年6月4日, Luminy (フランス).

舟木直久: Invariant measures for a linear stochastic heat equation related to the KPZ equation; 36<sup>th</sup> Conference on "Stochastic Processes and their Applications", 2013年8月1日, Boulder (米国).

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0件)  
取得状況 (計 0件)

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

侯野 博 (MATANO Hiroshi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 40126165

### (2) 研究分担者

中村 健一 (NAKAMURA Ken-Ichi)  
金沢大学・数物科学系・准教授  
研究者番号: 40293120

舟木 直久 (FUNAKI Tadahisa)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 60112174

### (3) 連携研究者

奈良光紀 (NARA Mitsunori)  
岩手大学・人文社会学部・准教授  
研究者番号: 90512161