様 式 C−19、F−19、Z−19 （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３０００２

研究課題名（和文）劣モジュラ最適化の近似アルゴリズム

研究課題名（英文）Approximation Algorithms for Submodular Optimization

研究代表者
岩田　覚（Iwata, Satoru）

東京大学・情報理工学（系）研究科・教授

研究者番号：００２６３１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,700,000円

研究成果の概要（和文）：劣モジュラ関数は，効率的に解くことのできる離散最適化問題に共通の構造して知られている．一方，実務上重要な多くの離散最適化問題はNP困難であり，現実的な時間内で近似解を得る近似アルゴリズムの設計が研究されてきた．本研究では，このような離散最適化の二つの大きな流れを融合して，汎用性の高い近似アルゴリズムを設計する手法を研究した．特に，劣モジュラ関数の一般化に当たるk劣モジュラ関数の最大化問題に対して，近似比1/2の近似アルゴリズムを設計した．さらに，単調k劣モジュラ関数に対しては，近似比がk/2(k-1)となる多項式時間アルゴリズムを開発した．

研究成果の概要（英文）：Submodularity is known to be a common structure among various efficiently solvable discrete optimization problems. On the other hand, most discrete optimization problems that arise in practice are NP-hard, and researchers have designed efficient algorithms for finding approximately optimal solutions. Combining these two streams of research in discrete optimization, we have tried to develop a systematic approach to design approximation algorithms for a generic framework of submodular optimization. In particular, we have provided a 1/2-approximation algorithm for maximizing k-submodular functions. We have also designed an approximation algorithm for maximizing monotone k-submodular functions within the ratio of k/2(k-1).

研究分野：数理工学

キーワード：離散最適化　劣モジュラ関数　近似アルゴリズム　NP困難　ネットワーク　離散凸性　巡回セールスマン問題　組合せ剛性理論

１．研究開始当初の背景

離散最適化問題の中には，最小木問題や最大流問題の様に，問題の構造を利用して効率的に解くことのできる問題と，効率的な厳密解法は本質的に存在し得ないと予想される NP 困難問題とがある．効率的に解くことのできる問題に対しては，単に個々の問題の解法を高速化するだけでなく，効率的に解ける仕組みを把握して，より広い範囲の離散最適化問題に適用可能な汎用解法の設計が重要である．

実際，効率的なアルゴリズムを有する多くの離散最適化問題に共通の構造として，劣モジュラ関数の重要性が Edmonds (1970) によって指摘されて以来，劣モジュラ関数に関する理論とアルゴリズムの研究が続けられてきた．劣モジュラ関数は，凸関数の離散版に当たり，ネットワークのカット容量関数や情報源のエントロピー関数など，様々な局面で現れる基礎的な概念である．劣モジュラ関数最小化の最初の多項式時間アルゴリズムは，Grötschel, Lovász, Schrijver (1981) によって与えられた．しかし，この解法は，実際上の性能において極めて非効率的な楕円体法を利用しており，不満足な状況にあった．これに対し，代表者等は，組合せ的な多項式時間アルゴリズムを開発した．

一方で，実用上有用な多くの離散最適化問題を含むＮＰ困難問題に対しては，問題の難しさを把握するだけでなく，次善の策を提供することが重要である．特に，1990 年代以降には，精度保証付き近似解法の設計が盛んに研究されてきた．その結果，線形計画問題や半正定値計画問題で記述される緩和問題の最適解から元の問題の実行可能解を得る丸め法，線形計画緩和問題の双対問題の実行可能解を維持して効率的に近似解を得る主双対法などの設計技法が確立された．これらの手法においては，線形計画法や半正定値計画法の双対定理が本質的な役割を果たしている．しかし，現在の理論の最先端で得られている成果の中には，楕円体法を用いているために，実際上の効率という点で問題のあるものも少なくないのが実状であった．

２．研究の目的

本研究課題は，離散最適化における上記の二つの大きな流れを融合することによって，実用化に向けた双方の問題点を克服し，より深くて有用な離散最適化手法を生み出すことを究極の目的としている．具体的には，以下の３テーマを追求した．

①劣モジュラ関数最大化近似アルゴリズムの実験的解析

劣モジュラ関数の最大値を求める最大化問題は，最小化問題と並んで重要な問題設定であるが，最大カット問題や集合被覆問題などの NP 困難な問題を含み，多項式時間解法は期待できない．Nemhauser, Wolsey, Fisher (1978) は，要素数一定の部分集合の中で単調劣モジュラ関数を最大化する問題に対して，単純な貪欲アルゴリズムが近似比 1-1/e の近似解を見出すことを示した．その後，Feige (1998) は，1-1/e が多項式時間で望み得る最良の近似比であることを示している．

近年になって，劣モジュラ関数の最大化は，組合せオークションの文脈で基本的な問題設定として有効であることが明らかになり，近似アルゴリズムの研究が注目を集めている．特に，最近，マトロイド制約付きの単調劣モジュラ関数最大化問題に対して，1-1/e 近似アルゴリズムが提案された．このアルゴリズムは，ある種の微分方程式を数値的に解くことで連続緩和問題の近似解を求めるとともに，目的関数値が小さくならないことの保証される確率的な丸め法を実行するなど斬新な手法を融合させている点で非常に興味深い．しかし，実際上の挙動については未知の部分が多く，包括的な計算機実験によって性能を検証する必要があった．

②劣モジュラ関数で記述される最適化問題に対する汎用近似アルゴリズムの設計

既存の離散最適化問題の線形目的関数やカット容量関数を劣モジュラ関数に置き換えることによって，より一般的な離散最適化問題が得られる．この種の問題に対する系統的な研究は，Svitkina, Fleischer (2008) によって始められた．代表者等は，単調劣モジュラ関数を他のより簡単な単調劣モジュラ関数で近似する効率的な手法を開発した．その結果，単調劣モジュラ関数を目的関数とする最適化問題に対しては，線形目的関数の場合の解法を利用して近似解法が得られることを示した．

さらに，問題の特殊性に注目して，より高精度の近似解法が得られる場合もある．代表者等は，グラフの点被覆で非負劣モジュラ関数の値が最小となるものを求める問題を提起し，劣モジュラ関数の離散凸性を利用することによって，線形目的関数の場合に知られている結果と同じ近似比２の近似アルゴリズムを設計した．この結果は，重複度が高々定数の集合被覆問題の劣モジュラ版にも拡張できる．一方で，線形目的関数の場合に多項式時間で解けるグラフの枝被覆問題の劣モジュラ版に対しては，劣モジュラ関数の近似によって達成できるものよりも本質的に良い近似比の解法が存在し得ない．このように，劣モジュラ関数を目的関数とする最適化問題に対しては，問題の構造を巧妙に利用できない限り，良い近似比のアルゴリズムの設計は難しいと言える．

本研究課題では，定数（あるいは対数）近似比のアルゴリズムを有する最適化問題の劣モジュラ版に対する近似アルゴリズムの設計を通じて，近似アルゴリズムの新たな汎用設計技法の確立を目指した．

③ネットワーク上の最適化問題に対する近似アルゴリズムの設計

ネットワーク上の最適化問題に対する近似アルゴリズムの多くは，線形計画法や半正定値計画法の双対定理を利用している．本研究課題では，この仕組みを高い視点から眺めることによって，劣モジュラ最適化の双対定理を利用した近似アルゴリズムの設計手法を確立することによって，有向グラフ上の巡回セールスマン問題に対する近似精度を改善することを目標とする．

無向グラフ上の巡回セールスマン問題には 3/2 近似アルゴリズムが知られているのに対して，有向グラフ上では，長い間，対数近似比のアルゴリズムしか知られていなかった．最近の研究で改善されたとはいえ，定数近似比のアルゴリズムの存在は依然として重要な未解決問題であり，新たなアプローチによる近似アルゴリズムの設計が期待されていた．

３．研究の方法

2012 年 10 月に，京都大学数理解析研究所において，国際研究集会「離散凸性と最適化」を開催した．劣モジュラ最適化に関わる研究に携わっていた国内外の研究者による招待講演と研究討論を通じて，劣モジュラ最適化の当時の研究動向を把握した．

劣モジュラ関数最大化の近似アルゴリズムを双劣モジュラ関数に拡張し，関連した結果と合わせて執筆したテクニカル・レポートを 2013 年 9 月に公開した．その直後に，SODA 2014 の採択論文のリストが公表され，英国の Ward, Zivny によって同様の結果が直前に得られていたことを知った．

2013 年 10 月には，コルシカ島で研究集会が開かれ，代表者は劣モジュラ関数最小化と近似アルゴリズムに関する連続講演を行った．イスラエルの Naor 氏も招待講演を行い，劣モジュラ関数最大化の近似アルゴリズムに関する研究成果を詳しく解説した．また，劣モジュラ最適化の機械学習分野への応用で活躍していたフランスの Bach 氏も招待講演を行った．

2014 年 9 月に Zivny 氏から SODA 2014 で発表した結果を論文誌に投稿する最終版が送られてきた．その中には，k 劣モジュラ関数最大化に関して，改善された結果が含まれていた．これに刺激されて，一層の改善を目指した研究討論を開始した．

2014 年 10 月から 12 月にかけて，学部学生の藤井海斗氏の協力を得て，マトロイド制約付き単調劣モジュラ関数最大化問題の近似アルゴリズムに関する実験的解析を行った．

2015 年 10 月には，ドイツのボンで「剛性，劣モジュラ性，離散凸性」と題する研究集会を組織し，各国から招待した講演者を中心に研究交流を行った．

４．研究成果

劣モジュラ関数の一般化に当たる k 劣モジュラ関数の最大化問題に対して，従来の近似比を大きく改善する近似アルゴリズムを開発した．各部分集合に対して関数値を返す集合関数とは異なり，互いに素な k 個の部分集合の組に対して値を返す関数が考えられる．この種の関数の中で，集合関数の場合の劣モジュラ性と同様の性質を保持している関数が，k 劣モジュラ関数と呼ばれる．特に，$k=2$ の場合は，双劣モジュラ関数と呼ばれ，1980 年代から詳しく研究されてきた．最近になって，画像処理への応用も視野に入れて，より大きな k に対する最適化問題が研究されるようになった．

2012 年 10 月に開催された国際会議 FOCS において，劣モジュラ関数最大化の新たな近似アルゴリズムがイスラエルの研究グループによって提案された．このアルゴリズムは，互いに包含関係のある二つの候補解を一定の規則に従って更新することによって，近似解に到達し，期待値としては最適解の 1/2 倍以上が保証される．このアルゴリズムは，単純な手法でありながら，多項式時間で達成可能な近似比の理論的上界を初めて達成したという点で画期的なものであった．

このアルゴリズムの挙動を解析した結果，本質的には，双劣モジュラ関数最大化が行われていることが観察された．その結果として，双劣モジュラ関数最大化に関する近似比 1/2 の近似アルゴリズムが得られた．さらに，その結果を発展させて，双劣モジュラ関数の一般化に当たる歪双劣モジュラ関数最大化の 8/25 近似アルゴリズムを開発した．しかし，その直前に，英国の研究者等が双劣モジュラ関数最大化に対して同様の結果を導いた上で，k 劣モジュラ関数最大化に拡張させた結果が国際会議に採択された．彼らは，引き続き，k 劣モジュラ関数最大化の近似比を 1/3 に改善して，学術雑誌に論文を投稿した．我々は，この結果を教えて貰ったのを受け，より一層の改善を目指して，検討を重ねた．

その結果として，非負 k 劣モジュラ関数の最大化問題に対して，近似比 1/2 のアルゴリズムを得た．さらに，単調 k 劣モジュラ関数に対象を限定した場合には，近似比 $k/(2k-1)$ のアルゴリズムが得られることも明らかになった．例えば $k=2$ の場合に関しては，近似比は 2/3 となり，単調性の結果として，近似比が 1/2 より大きく改善されている．

一方，単調 k 劣モジュラ関数の最大化に対して，近似比が $(k+1)/2k$ よりも良い多項式時間近似アルゴリズムが存在し得ないことも示した．これらの結果を歪双劣モジュラ関数最大化に関する結果と合わせて，2016 年 1 月に開催された国際会議 SODA で発表した．

2016 年の SODA では，安定マッチング問題のポリマトロイド対への拡張に関する論文も発表している．ポリマトロイドとは，単調

劣モジュラ関数で記述される多面体のことであり，効率的に解くことのできる離散最適化問題の多くと本質的に関係している．安定マッチング問題は，大学進学希望者や研修医の配属決定方式として 1960 年代に Gale, Shapley によって研究が始められたモデルであり，近年では学校選択制の導入に伴い，身近な存在となっている．この種のモデルを現実の設定に適用するには，それぞれの文脈に応じて柔軟な変更が必要となる．その際に，元の安定マッチング理論が示していた良い性質が保持されていることが望まれる．

本研究では，2 部グラフ上でのマッチングを用いた元の定式化から，ポリマトロイド対上の定式化に大きく一般化した上で，安定配分を見出すアルゴリズムを設計し，その正当性を証明することによって，安定配分の存在を示した．アルゴリズムは効率的で，計算量が台集合の大きさの多項式で抑えられる強多項式時間アルゴリズムとなっている．

一般に，ポリマトロイドを用いて記述される離散最適化問題の汎用的な枠組みで，効率的なアルゴリズムが与えられるものが複数知られている．本研究成果は，このリストに新たな枠組みを加えているという側面でも興味深い．

マトロイド制約付き劣モジュラ関数最大化問題に対する既存の近似アルゴリズムの計算機実験の結果，ランダムに構成された関数例に対しては，単純な貪欲アルゴリズムが，計算時間，近似比の両面から，他のアルゴリズムを凌駕していることが明らかとなった．

劣モジュラ関数で記述される最適化問題に対する近似アルゴリズムの設計としては，検索結果の表示順序に関連して注目を集めている順序付け問題に対する Azar, Gamzu, Yin (2009) の 2 近似アルゴリズムや計算資源の効率的な配分に関連した最小和被覆問題に対する Feige, Lovasz, Tetali (2004) の 4 近似アルゴリズムに劣モジュラ最適化の文脈における解釈を与え，同じ近似比で，より一般的な状況設定に適用可能な近似アルゴリズムを設計した．

本研究課題では，劣モジュラ関数を用いた一般的な枠組みだけでなく，グラフ・ネットワークに代表される具体的な問題設定への応用にも取り組んできた．特に，巡回セールスマン問題に対する近似アルゴリズムの設計を目的としていた．この観点から，3 正則グラフ上の最小 2 辺連結全域グラフ問題に対する 6/5 近似アルゴリズムや最大最小重み T ジョイン問題に対する 2/3 近似アルゴリズムを海外の研究者と共同で開発した．これらの近似アルゴリズムの設計では，劣モジュラ性の利用が本質的な役割を果たしている．

グラフ的巡回セールスマン問題に対して，Steiner 閉路を経由して近似アルゴリズムを設計する新たな手法を提案したが，近似比を更新するような近似アルゴリズムの開発には至っていない．有向グラフ上の非対称巡回セールスマン問題に対する定数近似アルゴリズムの設計は，研究開始時には目標に入っていた．この問題は，EPFL の Svensson 氏によって解決され，2015 年 10 月の国際会議 FOCS で発表された．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 10 件）〔全て査読済〕

① S. Iwata, S. Tanigawa, and Y. Yoshida, Improved approximation algorithms for k-submodular function maximization, *Proc. 27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2016), pp. 404-413.
DOI: 10.1137/1.9781611974331.ch30

② S. Iwata and Y. Yokoi: Finding a stable allocation in polymatroid intersection, *Proc. 27th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2016), pp.1034-1047.
DOI: 10.1137/1.9781611974331.ch73

③ S. Tanigawa and Y. Yoshida: Testing the supermodular-cut conditions, *Algorithmica*, 71 (2015), pp.1065-1075.
DOI: 10.1007/s00453-013-9842-8

④ S. Iwata, A. Newman, and R. Ravi: Graph TSP from Steiner cycles, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, LNCS 8747, Springer, 2014, pp.312-323.
DOI: 10.1007/978-3-319-12340-0_26

⑤ S. Iwata and T. Jordan: Orientations and detachments of graphs with prescribed degrees and connectivity, *Discrete Optim.*, 12 (2014), pp.121-128.
DOI: 10.1016/j.disopt.2014.02003

⑥ K. Takazawa: Optimal matching forests and valuated delta-matroids, *SIAM J. Discrete Math.*, 28 (2014), pp.445-467.
DOI: 101137/110827661

⑦ B. Jackson, T. Jordan, and S. Tanigawa: Combinatorial conditions for the unique completability of low rank matrices, *SIAM J. Discrete Math.*, 28 (2014), pp.1797-1819.
DOI: 10.1137/140960098

⑧ S. Iwata and R. Ravi: Approximating max-min weighted T-joins, *Operations Research Letters*, 41 (2013), pp.321-324.
DOI: 10.1016/j.orl.2013.03.004

⑨ S. Boyd, S. Iwata, and K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, 27 (2013), pp.918-939.
DOI: 101137/110841837

⑩ M. X. Goemans, S. Iwata, and R. Zenklusen, A flow model based on polylinking systems, *Math. Programming*, 135 (2012), pp.1-23.
DOI: 10.1007/s10107-011-0446-2

〔学会発表〕（計 7 件）

① S. Iwata and Y. Yokoi: Finding a stable allocation in polymatroid intersection, 22th International Symposium on Mathematical Programming, 2015 年 7 月 12 日～17 日, Pittsburgh (アメリカ合衆国).

② S. Iwata: Submodular Functions: Minimization and Approximation Algorithms, The Fourth Cargese Workshop on Combinatorial Optimization, 2013 年 9 月 30～10 月 5 日, Cargese (フランス共和国).

〔その他〕

ホームページ等

http://www.opt.mist.i.u-tokyo.ac.jp

６．研究組織

(1)研究代表者

岩田　覚　　（IWATA, Satoru）

東京大学・情報理工学系研究科・教授

研究者番号：00263161

(2)研究分担者

高澤　兼二郎（TAKAZAWA, Kenjiro）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：10583859

(3)研究分担者

谷川　眞一　（TANIGAWA, Shin-ichi）

京都大学·数理解析研究所·助教

研究者番号：30623540