様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３４０００１

研究課題名（和文）周期積分とモチーフの幾何と数論

研究課題名（英文）Geometry and arithmetic of period integrals and motives

研究代表者
寺杣　友秀（TERASOMA, Tomohide）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０１９２６５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,800,000円

研究成果の概要（和文）：混合TateモチーフのHodge実現関手の構成のために、semi-algebraic setを使ってある鎖複体を構成し一般化されたコーシー公式を証明した。
また混合楕円モチーフについて、深さフィルトレーションをあたえるモチーフのフィルトレーションを定義した。高次チャウ群からコホモロジーへのサイクル写像の像の次元が大きい曲面の構成をした。
２変数超幾何方程式系が可約になる特別なパラメーターに関する Schwarz 写像を研究した。このタイプの周期逆写像をテータ関数を用いて記述した。種数２の代数曲線族についてのAbel-Jacobi 写像の像特徴づけた。

研究成果の概要（英文）：We construct a complex using semi-algebraic set and prove generalized Cauchy formula to construct a Hodge realization functor of mixed Tate motives.
We introduce a motivic filtration which gives a depth filtration. We construct surfaces which have big images of cycle maps from higher Chow groups to cohomologies.
We study Schwarz maps for reducible hypergeometric systems of two variable with a special parameter. We describe the inverse period map using theta function. We give a description of the image of Abel-Jacobi map corresponding to a family of genus two curves.

研究分野：代数幾何

キーワード：モチーフ　周期積分　代数的サイクル　コホモロジー

１．研究開始当初の背景
代数多様体の不変量として代表的なものにコホモロジー理論があるが、モチーフの理論は代数多様体の普遍的なコホモロジー理論といえる。とりわけ近年では混合モチーフの理論が整備されつつあり、それに従って Beilinson-Soule の消滅予想など新たな問題も持ち上がっている。混合モチーフとして表されるものとして従来のコホモロジーのほかに基本群などの、より精密なホモトピー的な不変量も扱えるようになっている。これらが扱えるようなホップ代数を始めとする代数系との関連も重要となってきていた。

さらにこれまでの周期積分の研究に現れるテータ関数や超幾何関数は特殊関数のなかでも幾何学的なオリジンをもつことから代数的サイクルや代数的対応とも関連が深く、あらたな形の算術幾何平均も幾何学的に意味のある関数等式から導かれるという点でモチーフ的な観点からの研究が有効であることがわかりつつあった。

２．研究の目的
ホッジ理論を用いることにより古典的な周期積分を一般的の多様体を扱うことが可能となったが、さらに詳しく周期写像を研究するには多様体個々の周期積分を扱うのみならず、多様体の族から得られるホッジ構造の変形理論を考えることが有用である。ホッジ構造の変形から得られるガウス・マニン・システムを考えることにより、微分方程式論的な扱いが可能となり、さらにその解の接続に由来するモノドロミー作用を考えることにより多くの情報が得られる。例えば、モノドロミー作用の像はリー群の離散群となるので完全な決定は一般には難しい問題である。

しかし特殊なときにはある場合には決定可能であり、その像のようすが周期積分の変形からえられる周期写像の満たすべき性質に強い制限を与える。本研究では、それら抽象的な理論を数論的、幾何的に特色のある多様体に対して適用することにより、古典的な対象物の延長線上にある多様体、とくにテータ関数を始めとする保型関数などと関連するモジュラー多様体、超幾何関数などと関連する射影空間の分岐被覆や配置空間の幾何、K3 曲面の族などを扱う。これらにおいては抽象的理論が精密な形で実現されており、その意味である意味で楕円曲線の類似ともいえ、それらの多くは数論的な問題にあらわれる対称性の豊かな多様体である。さらに代数多様体のホモトピー理論であるといわれる、混合モチーフ理論と周期積分の延長ともいえる高次単数基準写像を用いて多重ゼータ値、多重対数関数、楕円多重対数関数などの数論的特殊関数を研究することを目的とする。
これらは特殊多様体としては一番基本的なもので、これらに関する周期写像を研究することが重要であるのみならず、それらの一般化として注目されているカラビ・ヤウ多様体などのより高次元の多様体へのあしがかりとなる。実際トマエの公式などは松本―寺杣により、ある特殊なカラビ・ヤウ多様体の周期写像に関する定理へと拡張されている。このような解析ができるのは、カラビ・ヤウ多様体としては射影空間の２重被覆として得られている特殊なもので、超幾何関数と関連のある多様体であることに起因している。高次元の多様体のホッジ構造の変形のより詳しい解析も初めに述べた研究の延長線上にある。

本研究のもう一つの柱はモチーフ理論とその基礎となっている、代数的サイクルと周期積分の相互関係を利用して双方の研究に利用することである。例えば、代数的サイクルや代数的対応を活用することによりこれまで見えてこなかった周期積分の関係式が幾何学的な起源をもとに深い考察ができるようになる。代数的サイクルや代数的対応を活用することによりこれまで見えてこなかった周期積分の関係式が幾何学的な起源をもつことがわかる。

３．研究の方法
（１）混合テイトモチーフのホッジ実現に関して。Bloch と Kriz により、Hodge 実現と周期積分を使った Hodge 実現が定義されているが、証明と構成法にに不十分な点がみとめられていた。これを明らかにする。
（２）楕円モチーフの研究に関して。ブロードハースト・クライマー予想に現れるフィルトレーションを理解する必要性があった。そのためには楕円モチーフと混合テイトモチーフの関連を明らかにする。
（３）曲面上のチャウ群の構成について。これまでミュラースタック、コリノ、斉藤秀司らが構成したものなどがあったが実際に高い階数のものが構成することは今後の研究の手がかりとして有用であるが、具体的に構成された例が少なくかった。また、その元を実際に構成するために位相的な計算の助けをかりる方法をとる。
（４）ベクトルバンドルに付随する幾何的に得られる代数的サイクルの計算について。桂氏からの問題提起としてプリュッカー埋め込みの次数の明示公式が必要となったが、これを計算する式はあたえる。
（５）超幾何微分方程式系の線形独立な解たちを並べて得られる射影空間への写像は、Schwarz 写像と呼ばれる。この写像に関するこれまでの研究では、超幾何微分方程式系が既約なものに限られていた。可約なものを研究する手がかりとして、２次元に関する様子を見ることを問題とする。
（６）ｐ－進微分方程式は通常の微分方程式と類似の性質が期待できるものもある。またエタール基本群とｐ－進基本群の関係はさ

まざまな問題が未解決として残っており、コンダクターなどのｐ－進解析特有の現象の解析をする。

４．研究成果

（１）モチーフと代数的サイクルに関する研究

①　混合 Tate モチーフの Hodge 実現関手の構成の研究を続けた。周期積分を使って Hodge 実現を定義するために、semi-algebraic set を使ってある鎖複体を構成した。その鎖複体が必要な性質を持つことを証明した。さらに対数積分によって得られる augmentation を研究した。ホッジ実現の際必要となる、一般化されたコーシー公式を証明した。これはブロック・クリズの論文のなかで公理として仮定されたものである。今後は、Bloch と Kriz の定義した Hodge 実現と周期積分を使った Hodge 実現が同じであることを証明する。よりくわしく、コーシー公式を証明のために実半代数的集合のうえで一位の極をもつ微分形式の積分について以下の研究をした.
a 実半代数的集合の上の有理微分形式の Lebesgue 積分についての一般論を展開した.
b 実半代数的集合のうえで一位の極をもつ微分形式が与えられたとき，その集合と極の因子の交わりの次元に関するある条件のもとで収束することを証明した．c 実半代数的な三角形分割をもつ空間のホモロジー理論を構築した．d 実半代数的集合の上の微分形式についての Stokes formula を証明した.

②　ホッジ実現の時には深さフィルトレーションをあたえるような絶対ガロア群の冪零商とモチビックガロア群における新しいフィルトレーションを定義した。これはテイト曲線の基本群の上に定まる楕円フィルトレーションによって得られるものである。混合楕円モチーフの理論をもちいると、尖点形式との関係を考えることができる。この構造を用いると、いくつかの標準的な予想のもとにブロードハースト・クライマー予想のある部分が確認できる。

③　高次チャウ群からコホモロジーへのサイクル写像の像の次元が大きい曲面の構成をした。高次チャウ群はチャウ群の右完全性を補完するために考案されたものである。曲面上のチャウ群の構成についてはこれまでミュラースタック、コリノ、斉藤秀司らが構成したものなどがあったが実際に高い階数のものが構成された例が少なかった。そのの元を実際に構成することは難しい。これを構成するのために多くの直線を含む曲面を取り上げた。さらにそれらの元が十分に独立であることを調べるために、エタールコホモロジーにおけるサイクル類を考えた。そこから由来するコホモロジーの拡大を考えて、その群のコホモロジークラスを計算した。実際の計算はモノドロミー・ウエイト・フィルトレーションをもちいて局所的な計算に帰着し、さらにそれを、２重対数関数の解析接続公式に帰着した。さらに構成された元たちの独立性を示す際に用いられたサイクルマップも、位相的にえられた元の独立性を示すために利用できて、今回の研究でその有用性が確認できた。モノドロミーの計算に多重対数関数を用いていることにより議論が簡明になった。

④　ベクトルバンドルに付随する幾何的に得られる代数的サイクルの計算で有名なものとしてよく調べられているものにシューベルト解析がある。得られた公式はプリュッカー埋め込みがその幾何学の範疇であるのに次数に関する結果が知られていなかった。セルバーグ積分との意外な関連によりさらに物理的な解釈が可能であることが示唆される。

（１）周期積分に関する研究

①　超幾何微分方程式系の線形独立な解たちを並べて得られる射影空間への写像は、Schwarz 写像と呼ばれる。この写像に関するこれまでの研究では、超幾何微分方程式系が既約なものに限られていた。Appell の F_2 と呼ばれる。２変数超幾何方程式系が可約になる場合でも有効であるモノドロミー表現と可約になる特別なパラメーターに関する Schwarz 写像を研究した。得られたモノドロミー表現は、真の不変部分空間を有しているが、その空間の幾何学的な特徴づけを与えた。解の積分表示と関係している既約でないエクスポネントをもつ超幾何方程式に関連する曲面のコホモロジーは混合ホッジ構造のがはいる。これまで、周期写像は簡約型代数群に付随する対称領域をターゲットとしていたが、このようなタイプの周期写像はそれらとベクトル空間との積がターゲットとなる。さらにその逆写像をテータ関数を用いて記述した。この曲面は直線の配置で分岐する被覆で得られるが、配置を回復するには拡大類に関する周期を用いなくてはならないところが、これまでの周期写像とは異なるところである。これを正確に定式化するためにホッジ構造の拡大の理論が不可欠となった。これまでホッジ構造の拡大まで考えて周期写像をつくり、さらに逆周期写像までこめて保型関数などを用いて完全に記述する例がなかったのが、目的が達成されたといえる。射影直線の４点で分岐する分岐被覆となる種数２の代数曲線族についての Abel-Jacobi 写像を用いて、複素平面と２次 Siegel 上半空間の直積空間への写像として Schwarz 写像を実現した。その像をあるテータ関数の零点集合として特徴づけて、逆写像をテータ関

数を用いて具体的に表示した。これまでの周期写像に関するこれまでの技法が使われた。さらに twisted homology group 上にある交点形式を用いて、circuit 変換は基底の取り方によらない形で与えている。その結果の系として、可約になった場合でも有効である基底に関するモノドロミー表現も具体的に与えた。

② 虚数単位 i が作用する楕円曲線に対して、Abel-Jacobi 写像の逆写像をテータ 関数を用いて具体的に与えた。その逆写像を利用して、楕円曲線上に定義される (1+i) 倍写像を具体的に表示し、反復平均の極限が超幾何級数で表示できることを示した。1の原始6乗根が作用する楕円曲線に対しても同様の結果が得られた。

（３）p-進周期積分に関連する研究

① X を標数 p > 0 の体 k 上の連結平滑代数多様体の開埋入で補集合が連結平滑因子であるものとし, E を (X,X) 上の過収束アイソクリスタルとするとき, E の微分 Artin 導手が, ほとんどの曲線からの transversal な局所閉埋入 i : (C,C) ,→ (X,X) による E の引き戻し i ∗ E の微分 Artin 導手と一致することを示した.
② V を混標数 (0,p) の完備離散付値環, X ⊆ X を V 上の半安定還元スキームの開埋入で X がV 上固有, D 補集合が相対正規交叉因子であるものとする. このとき, 適切な p 進非リュービル性を持つ Σ ⊆ Z p /Z を決めると X の特殊ファイバー上の対数的過収束アイソクリスタルで Σ 冪単なもののなす圏から X の一般ファイバー上の可積分接続付加群で Σ 冪単なもののなす圏への忠実充満関手が対数的延長関手, 代数化関手, 制限関手の合成により定まるが, Σ が群を成すときにこの関手がテンソル積と整合的であり, 対応する淡中双対の全射を定めることを示した. (V. Di Proietto 氏との共同研究)
③ (k,N) を標数 0 の標準的対数点, (X,M) →(k,N) を (k,N) 上の準射影的な単純正規交叉対数的代数多様体とするときに, 適切な対数的可積分接続付加群のなす圏の淡中双対として定まるドラーム基本群の完全列を純代数的に構成した. また副可解商に対しての最初の射の単射性を純代数的に示した. (V. Di Proietto 氏との共同研究)
X を p が冪零かつ滑らかなスキームとするとき、適当な仮定の下で X のフロベニウス捻り状の準冪零可積分 p 接続つき加群の圏と X 状の準冪零化石分接続つき加群の圏が圏同値となり、これは Ogus-Vologodsky 対応の部分的な一般化となる。
④ X を正標数の代数閉体上の射影的で滑らかな代数多様体でエタール基本群が自明なものとするとき, X 上の収束アイソクリスタルは自明なものしかないだろうという予想が de Jong により提出されている. X の最大スロープが非正のときにこの予想が正しいことを証明した. (H.Esnault 氏との共同研究) 論文を執筆中である.
⑤ 適切な条件を満たす標数 0 の対数的代数多様体の切断付きの射 f : (X,M) → (S,N) に対して, その相対的な副冪単ドラーム基本群の様々な定義が一致することを純代数的に証明した. 応用として f が安定対数的曲線のときの副冪単ドラーム基本群へのモノドロミー作用が純代数的に記述できることを示した. (B. Chiarellotto 氏 ,V. Di Proietto 氏との共同研究)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 11 件)

(1) V. Di Proietto and A. Shiho: “On p-adic diffenrential equations on semistable varieties II ” , Manuscripta Math.146 (2015)179-199. 査読あり
(2) M. Hanamura, Quasi DG categories and mixed motivic sheaves. J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), no. 7, 2816-2900. 査読あり
(3) J. Broedel, O. Schlotterer, S. Stieberger and T. Terasoma, All order alpha prime-expansion of superstring trees from theDrinfeld associator, Physical Review D, 89, (2014)査読あり
(4) K. Matsumoto, ; M. Yoshida, Monodromy of Lauricella's hypergeometric FA-system. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 13 (2014), no. 2, 551-577. 査読あり
(5) M. Hanamura, Chow cohomology groups of algebraic surfaces. Math. Res. Lett. 21 (2014), no. 3, 479-493. 査読あり
(6) M. Hanamura, Theory of mixed motives, Sugaku Expositions 27 (2014), no. 1, 69-84 査読あり
(7) K. Matsumoto, Monodromy and Pfaffian of Lauricella's FD in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups. Kyushu J. Math. 67 (2013), no. 2, 367-387. 査読あり
(8)K.Matsumoto and T.Terasoma : Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the pro-jective plane branching along six lines. J.Reine. Andgew. Math. 669 (2012) 121-149. 査読あり
(9)T.Terasoma : Varieties of lines on Fermat hypersurfaces. Arrangements of hyperplanes, Sapporo 2009, Adv. Stud Pure Math., 62, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012, 査読あり
(10) K. Matsumoto, T. Oikawa, Limits of iterations of complex maps and

hypergeometric functions. Hokkaido Math. J. 41 (2012), no. 1, 135-155. 査読あり
(11) K. Kimura, S. Kimura, N. Takahashi, Motivic zeta functions in additive monoidal categories. J. K-Theory 9 (2012), no. 3, 459-473. 査読あり

〔学会発表〕(計 18 件)
(1) A. Shiho, Convergent isocrystals on simply connected varieties, Workshop on recent trends in p-adic cohomology, Imperial College London, イギリス 2015 年 3 月 25 日.
(2) T. Terasoma, "Period map of mixed Hodge structures for certain triple coverings.", Curves, Moduli and Integrable systems, 2015/2/17, 津田塾大学
(3) T. Terasoma "Mixed elliptic motives and depth filtration of multiple zeta values.", Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, 2015/1/27, 東京大学数理科学研究科 .
(4) T. Terasoma, "Depth filitration and mixed elliptic motives.", Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives II, 2014/12/3, ICMAT, Madrid、スペイン
(5) T. Terasoma, "Depth flitration of multiple zeta values and Tate curves.", Conference on Hodge Theoryand L 2 -cohomology, 2014/11/22, Johns Hopkins University. Baltimore アメリカ
(6) T. Terasoma, "A flitration arising from representation of Tate curves. ", Workshops on multiple zeta values 、2014/8/23, 九州大学
(7) T. Terasoma, A construction of surfaces with non-trivial Higher Chow groups, Arithmetic and Al-gebraic Geometry, 東京大学数理科学研究科 , 2014 年 1 月 27 日
(8) A. Shino, On differential Artin conductor of overconvergent iscocrystals, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 東京大学, 2014 年 1 月 30 日.
(9) A. Shiho, On homotopy exact sequence for log de Rham fundamental groups, p-adic cohomology and its applications 2014, 東北大学 , 2014 年 1 月 7 日.
(10) A. Shiho, On the differential Artin conductor of overconvergent isocrystals, Seminario Padova " geometria algebrica aritmetica", Universita di Padova(イタリア), 2013 年 11 月 7 日.
(11) T. Terasoma, Hypergeometric identities and Brown-Zagier identities, 多重ゼータ値の諸相 , 京都大学数理解析研究所 , 2013 年 7 月 24 日
(12) 寺杣友秀 Grothendieck Teichmuller 群のコホモロジー的表現, 大阪大学 談話会 , 2013 年 7 月 5 日 .
(13) T. Terasoma, Cohomological representation of Grothendieck Teichmuller group, Recent advances in Hodge theory: Period Domains, Algebraic cycles, and Arithmetic, UBC, Vancouver, 2013 年 6 月 14 日.
(14) 志甫淳、p 進微分方程式と係数つきリジッドコホモロジー, 談話会, 大阪大学, 2013 年 10 月 21 日. p 進数と p 進微分方程式, On restriction of overconvergent isocrystals , On a generalization of local Ogus-Vologodsky correspondence (3 回講演), 豊田中央研数学コロキウム, 豊田中央研究所, 2013 年 4 月 25 日.
(15) A. Shiho, On p-adic differential equations, Mathematics colloquium, 延世大学校 (韓国、ソウル) , 2013 年 3 月 28 日.
(16) A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals, Number theory seminar, KIAS(韓国、ソウル),
2013 年 3 月 27 日.
(17) A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals, p-adic cohomology and its applica-
tions to arithmetic geometry, 東北大学, 2012 年 11 月 2 日.
(18) A. Shiho, On a generalization of local Ogus-Vologodsky correspondence, Symposium, on arithmetic geomtery, 九州大学, 2012 年 10 月 20 日.

〔その他〕
ホームページ等
http://gauss.ms.u-tokyo.ac.jp

６．研究組織
(1)研究代表者
寺杣友秀 (TERASOMA Tomohide)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654

(2)研究分担者
花村昌樹 (HANAMURA Masaki)
東北大学・理学研究科・教授
研究者番号： 60189587

木村健一郎 (KIMURA Kenichirou)
筑波大学・数理物質科学研究科・講師
研究者番号： 60189587

松本圭司 (MATSUMOTO Keiji)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号： 60189587

志甫淳　　(SHIHO Atsushi)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号： 60189587