

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340002

研究課題名(和文)特殊函数の現代的発展 - 表現論と複素積分からのアプローチ

研究課題名(英文)Recent development of special functions from the viewpoint of the representation theory and the integrals in complex variables

研究代表者

三町 勝久 (MIMACHI, KATSUHISA)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：40211594

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,400,000円

研究成果の概要(和文)：ガウスの ${}_2F_1$ 、一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ 、アッペルの $F_1, F_2, F_3$ 、ジョルダン・ポッホハンマー $F_{\text{JP}}$ 、そしてラウリッツェラの $F_D$ なる微分方程式(系)の解の基本系を積分表示で与え、それについての回路行列を明示的に求め、応用として、微分方程式の既約条件を決定した。また $F_2, F_3, F_4$ の場合、隣接関係を調べることにより、対応する微分方程式の可約条件を与えた。 $F_1 \sim F_4, F_A \sim F_D, {}_{n+1}F_n$ およびゲルファントの点配置空間上の超幾何微分方程式系について、ある多価函数のサイクル上の積分が解を与えることを示した。

研究成果の概要(英文)：We calculated explicitly the circuit matrices associated with Gauss'  ${}_2F_1$ , the generalized hypergeometric functions  ${}_{n+1}F_n$ , Appell's  $F_1, F_2, F_3$ , Jordan-Pochhammer  $F_{\text{JP}}$ , and Lauricella's  $F_D$ , and, by using them, we determine the conditions that the corresponding (system of) differential equations being irreducible. On the other hand, in the cases of  $F_2, F_3, F_4$ , we study the contiguity relations and give the conditions that the corresponding systems being reducible.

We prove that, in each case of the classical hypergeometric equations and Gelfand's hypergeometric system on the space of point configurations, the integral of a multivalued functions over any cycle satisfies the system of differential equations. Here the classical hypergeometric equations mean the equations satisfied by Appell's  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , Lauricella's  $F_D, F_A, F_B, F_C$ , and the generalized hypergeometric function  ${}_{n+1}F_n$ .

研究分野：代数解析

キーワード：超幾何函数 超幾何積分 複素積分 モノドロミー 既約性 ねじれホモロジー フックス型微分方程式 接続問題

## 1. 研究開始当初の背景

複素積分とは、青本和彦(名大名誉教授)らが精力的に研究したものであり、積分を捩れコホモロジーと捩れホモロジーとのペアリングと見なすことにより、積分の構造解析に、複素解析的微分方程式論、代数幾何、複素解析幾何、位相幾何等の諸理論を応用するものである。この方法論はいわゆる  $q$  類似の場合にも適用される。この視点から、KZ 方程式の解などとして現れる Selberg 型積分(差積の複素冪を被積分函数にもつ)の構造を調べることに、特に、A 型ルート系に付随した超幾何函数の積分表示を深く理解することは、代表者のそれまでの中心課題であり、幾つかの成果を得ていた。そのひとつとして、捩れホモロジーの空間上に岩堀-Hecke 代数の既約表現を構成し、Lawrence が 1990 年に提出した予想を解決した結果があるが、これはホモロジーのジェネリシティー条件の崩れる場合に生じる部分空間を旨に取り出すことにより実現されたものである。代数幾何学・位相幾何学そして微分方程式論の専門家が避けてきた場合の重要性が浮かび上がってきた。このようなことから、ジェネリシティー条件の崩れる場合 = 共鳴条件 (resonance condition) を満たす場合の研究が多変数の超幾何函数および球函数の解明に必要な不可欠であるという認識に至った。

## 2. 研究の目的

Gauss の超幾何函数の良い多変数化に向けて、ルート系に付随する超幾何函数と複素積分の二つのながれを統一的に把握するのが本研究の目的である。より具体的なテーマの代表例を箇条書きにすると、以下の通りである。

(1) 複素積分(局所係数の de Rham 理論): いったん積分をコホモロジーとホモロジーとのペアリングと見なすことにより積分を分解し、被積分函数にまつわる代数幾何的構造、複素解析幾何的構造、位相幾何的構造を汲み取り、その反映としての函数論的性質を追及する。特に、被積分函数の特異因子(divisor)や指数(exponent)が退化した場合の捩れ(コ)ホモロジーの基礎的研究に焦点を当てる。

(2) 表現論と微分方程式: 微分方程式の解の大域構造を調べるために、微分方程式に付随するモノドロミー群を調べることに、解の接続問題を解くことを考える。特に、接続問題に関しては、ねじれホモロジーの交点数に関する知見を深める題材と位置付ける。また、共鳴条件下での振る舞いを詳細に検討するためにも、代表者は、佐々木武と共同で、Gauss の超幾何積分を含むいくつかの古典超幾何積分のモノドロミー群の既約性・可約性の決定および可約な場合の分類などを行う。

共鳴条件下における微妙な構造の変化を認識するには格好の材料である。

(3) 数理物理への応用: 共形場理論における物理的相関函数(多価の正則函数と反正則函数と定数の積の和で表される一価函数であり、この正則部分が共形ブロック)が捩れサイクルの交叉理論に現れる不変エルミート形式そのものであるというのが代表者と連携研究者・吉田により得られた結果であった。ところが、相関函数には対角型と非対角型とがあることが知られており、代表者・吉田が捉えたのは対角型のものである。そしてその後、代表者は、ある常微分方程式の解の接続問題を解き、その応用として、非対角型のを系統的に導くことに成功したが、そこで捉えられたのは、D 型と E 型の 2 種類ある非対角型のうちの D 型だけである。そこで、本研究では、E 型の相関函数の意味をはっきりさせることを目的のひとつに加えたい。

## 3. 研究の方法

(1) 複素積分の立場からの de Rham 理論の研究は代表者と吉田正章(九州大)とが共同で研究する。とくに、ねじれホモロジーの交点数の研究に焦点を絞る。その際、必要に応じて、青本和彦(名大名誉教授)、落合啓之(名大)、野海正俊(神戸大)、趙康治(九大)、松本圭司(北大)、寺尾宏明(北大)と議論する。

(2) Appell の  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , Lauricella の  $F_A, F_B, F_C, F_D$ , 一般超幾何函数  $\{ \}_{n} F_{n-1}$  などの古典的な超幾何函数および Gelfand の超幾何函数  $\{ \}_{mE_n}$  のモノドロミーの研究を代表者と佐々木武(神戸大学名誉教授)との共同で進める。その際、モノドロミー群が既約となる条件の決定や、既約でない場合の表現の具体的構成、有限群となる条件の決定を具体的な目標とする。

(3) Fuchs 型微分方程式のモノドロミーや解の接続公式を調べることを、代表者と原岡喜重(熊本大)とが協力して行う。

(4) アクセサリパラメタの無い微分方程式に関連した積分の研究を代表者と金子譲一(琉球大)とが共同で行う。

(5) 共形場理論、可解格子模型など数理物理に対する応用は代表者と山田泰彦(神戸大)との共同で行う。

## 4. 研究成果

(1) 佐々木武(神戸大)との共同研究が中

心となった結果であるが、Gauss の超幾何関数  $\{ {}_2F_1, \text{Appell の超幾何関数 } F_1, F_2, F_3, F_4, \text{Lauricella の } F_D, \text{一般化超幾何関数 } \{_{n+1}F_n \}$  に付随するモノドロミー表現に関して、具体的に積分表示で与えた解の基本系にたいする回路行列（モノドロミー表現の行列要素）を陽に求めた。複素積分表示された解がいかなるとき対応する微分方程式の解になるかという条件を徹底的に調べてあげて議論したおかげで、モノドロミー表現を得るために課するパラメータに対する条件を劇的に緩めることに成功し、得られたモノドロミー表現を利用することで、モノドロミー表現が既約となる十分条件を決定することができた。これは E. Bod（ユトレヒト大）が 2012 年に得た（一般超幾何微分方程式の場合は 1989 年の Beukers-Heckman の結果による）必要十分条件の十分性に対応しているが、Bod の方法は F. Beukers（ユトレヒト大）による A 超幾何関数に対する結果（2011 年）を応用したものである。これと比べると、我々の方法は初等的である。一方、 $F_2, F_3, F_4$  の既約条件の十分性についてはパラメータの異なる微分方程式系をつなぐ contiguity operators の核を調べることにより、その条件を決定した。

(2) 野海正俊（神戸大）との共同研究により、古典超幾何微分方程式とゲルファントの点配置空間上の超幾何微分方程式系の場合、ある多価関数のサイクル上の積分が解を与えることを示した。ここで古典超幾何微分方程式とはアッペルの  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , ローリッツラの  $F_D, F_A, F_B, F_C$ , および一般超幾何関数  $\{ \{_{n+1}F_n \}$  がみたす微分方程式のことである。

(3) セルバーグの積分公式の合流版であるところの Mehta の積分公式は、ランダム・マトリクス理論における相関関数の研究に不可欠なものである。この公式の証明は、セルバーグの積分公式を仮定して、その合流操作で得ることができるが、これ以外の方法は、未だ知られていない。ところが、複素積分の理論からの視点によると、直接的な証明がしかるべき形であるはずと考えられ、一方で、その構造が明らかにならねば、複素積分の理論の対象として取扱い不可能のままとなってしまう。このような動機で、新たな証明を探す努力を開始したが、 $n=2, 3, 4, 5$  の場合の  $n$  重積分にしか成功しておらず、一般の  $n$  の場合には皆目見当がつかない。今後も鋭意努力したい。

(4) 一般超幾何微分方程式が可約な場合に、そのモノドロミーの部分表現として得られる空間が  $W$  代数（Virasoro の拡張版）に付随する場の理論（戸田場の理論）に現れる相関関数を与えるということを示した。ただし、

モノドロミーの部分表現の系列を一般の一般超幾何関数の場合に取りだしたものの、場の理論との関係がはつきりしたのは  ${}_3F_2$  の場合 ( $W_3$  代数の場合) のみであるので、一般化にむけて努力したい。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 9 件)

K. Mimachi, Monodromy representations associated with the generalized hypergeometric function  $\{_{n+1}F_n$  and their reducibility, *Kyushu J. Math.* 70 (2016), 105--129, (doi: 10.2206/kyushujm.70.105) 査読有.

K. Mimachi and Takeshi Sasaki, Reducibility of the systems of differential equations satisfied by Appell's  $F_2, F_3$  and  $F_4$ , *Kyushu J. Mathematics*, 69 (2015), 429--435, (doi:10.2206/kyushujm.69.429) 査読有.

K. Mimachi, The connection problem associated with a Selberg type integral and the  $q$ -Racah polynomials, *Forum Mathematicum*, 25 (2013), 1127--1179. (Ahead of Print. DOI 10.1515 /FORM.2011.139). 査読有.

K. Mimachi, Solutions for some families of Fuchsian differential equations free from accessory parameters in terms of the integral, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 62 (2012), "Arrangements of Hyperplanes — Sapporo 2009", 233--260. 査読有.

K. Mimachi and Takeshi Sasaki, Monodromy representations associated with Appell's hypergeometric function  $F_1$  using integrals of a multivalued function, *Kyushu J. Math.*, 66 (2012), 89--114. 査読有.

K. Mimachi and Takeshi Sasaki, Irreducibility and reducibility of Lauricella's system of differential equations  $E_D$  and the Jordan-Pochhammer differential equation  $E_{JP}$ , *Kyushu J. Math.*, 66 (2012), 61--87. 査読有.

K.Mimachi and Takeshi Sasaki, Monodromy representations associated with the Gauss hypergeometric function using integrals of a multivalued function, Kyushu J. Math., 66 (2012), 35—60, 査読有.

K. Mimachi and Yoshishige Haraoka, A connection problem for Simposon's even family of rank four, Funkt. Ekvac., 54 (2011), 495--5150, 査読有.

K.Mimachi, Intersection numbers for twisted cycles and the connection problem associated with the generalized hypergeometric function  ${}_{n+1}F_n$ , International Mathematics Research Notices, 2011 (2011), 1757--1781, 査読有.

〔学会発表〕(計 10 件)

三町勝久, 一般超幾何方程式  ${}_{n+1}E_n$  に付随するモノドロミー表現, 2016.1.6, 超幾何方程式研究会 2016 (代表: 高山信毅, 小池達也), 神戸大学瀧川記念学術交流会館(神戸市灘区六甲台町), 2016.1.5-7.

三町勝久, Monodromy representations associated with the generalized hypergeometric functions  ${}_{n+1}F_n$ , 2015.3.15, アクセサリー・パラメーター研究会(世話人: 大島利雄, 木村弘信, 加藤文元, 原岡喜重), 熊本大学理学部, 2015.3.13-15.

三町勝久, Monodromy representations associated with the generalized hypergeometric functions  ${}_{n+1}F_n$ , 2015.3.6, RIMS workshop "Representation Theory, Special Functions and Painleve Equations," organized by Hitoshi Konno (TUMSAT), Yasuho Masuda (Kobe), Masa-Hiko Saito (Kobe), Hidetaka Sakai (Tokyo), Junichi Shiraishi (Tokyo), Takao Suzuki (Kinki), and Yasuhiko Yamada (Kobe), 京大数理研, 2015.3.3-6.

三町勝久, Gelfand の超幾何微分方程式  $E(k,n)$  の可約性と隣接作用素, 2015.1.6, 超幾何方程式研究会 2015(代表: 高山信毅, 小池達也), 神戸大学瀧川記念学術交流会館, 2015.1.5-7.

三町勝久, Mehta-Macdonald の積分公式の導出 ( $N=2,3,4,5$ ), 2014.1.6, 超幾何方程

式研究会 2014(代表: 高山信毅, 小池達也), 神戸大学瀧川記念学術交流会館, 2014.1.5-7.

三町勝久, Irreducibility and reducibility of several hypergeometric functions, 2013.8.30, JSPS-NWO 二国間交流日蘭セミナー Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, (組織委員 野村隆昭(九州大), Gerard Helminck(Kdv Institute)), 名古屋大学, 2013.8.26--30.

三町勝久, Appell の  $F_4$  超幾何函数に付随するモノドロミー表現 II, 2013.3.16, 研究会「アクセサリー・パラメーター研究会」(世話人: 大島利雄, 加藤文元, 原岡喜重), 熊本大学, 2013.3.15-17.

三町勝久, Appell の  $F_4$  超幾何函数に付随するモノドロミー表現, 2013.1.6, 超幾何方程式研究会 2013(代表: 高山信毅, 小池達也), 神戸大学, 2013.1.5-7.

三町勝久, 一般超幾何函数  ${}_{n+1}F_n$  に付随するモノドロミー表現, 研究会「超幾何関数とその周辺」, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市玉原高原), 2012.7.1, 2012.6.30--7.1, (代表: 織田孝幸),

三町勝久, ガウスの超幾何微分方程式の積分表示解について え, 何をいませら,,, いえいえ, 惚けた訳ではありません, 超幾何方程式研究会 2012(代表: 高山信毅, 小池達也), 2012.1.7, 神戸大学, 2012.1.5-7.

〔図書〕  
特になし

〔産業財産権〕  
特になし

〔その他〕  
特になし

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
三町 勝久 (MIMACHI KATSUHISA )  
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 4 0 2 1 1 5 9 4

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3)連携研究者

吉田 正章 (YOSHIDA MASAAKI)

九州大学・名誉教授

研究者番号：30030787

黒川 信重 (KUROKAWA NOBUSHIGE)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：70114866

高田 敏恵 (TAKATA TOSHIE)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：40253398