

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 16 日現在

機関番号：32641  
研究種目：基盤研究(B)  
研究期間：2011～2014  
課題番号：23340003  
研究課題名(和文)コホモロジーによる代数的サイクルの研究  
  
研究課題名(英文)Research on algebraic cycles by cohomology  
  
研究代表者  
佐藤 周友(SATO, Kanetomo)  
  
中央大学・理工学部・教授  
  
研究者番号：50324398  
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：代数的な多様体(代数方程式で定義された図形)の上のベクトル束を調べる道具としてチャーン類というものがある。これはベクトル束がどれくらい(あるいは、どのように)ねじれているかをコホモロジーとよばれる線形空間の中で測る「物差し」である。本研究では、「そもそもチャーン類はどのようなコホモロジーの中で定義され得るのか?」という素朴な疑問から出発し、最小の条件(公理)を定式化した。さらにそのようなコホモロジーにおいてリーマン・ロッホの定理が実際に成り立つことも証明した。

研究成果の概要(英文)：As a tool to study vector bundles on algebraic varieties, we have the notion of Chern class, which measures 'how a vector bundle is twisted', in a linear space called cohomology. In this research under report, we start with a naive question concerning 'in what kind of cohomology the Chern classes are defined', and formulated a minimal set of axioms for such cohomology. We also proved the Riemann-Roch theorem holds in such cohomology theories.

研究分野：代数学

キーワード：代数学 整数論 数論幾何学 代数的サイクル 代数的K理論 モチーフ コホモロジー

## 1. 研究開始当初の背景

多様体の Grothendieck 群はベクトル束の形式和のなす自由アーベル群をある簡単な同値関係で割ることによって定義される。多様体の因子類群は Grothendieck 群の直和因子である。Grothendieck 群を一般化したのが代数的  $K$  群である。

Grothendieck 群、および代数的  $K$  群は、代数幾何において登場した不変量であり、それ自体が興味深い対象である。1980 年代初頭に提出された Bloch-Beilinson **予想**は、代数的  $K$  群について、およそ次のことを予言している：

- (a) 代数的  $K$  群は、ある種の普遍性を持つコホモロジー関手である。(混合モチーフの哲学)
- (b) 算術的スキームの代数的  $K$  群は有限生成アーベル群であり、そこから得られる情報 (階数、ねじれ部分の位数、単数基準の値) によって多様体のゼータ関数の特殊値が記述される。(ただし最初の有限生成性に関する部分は、1970 年代に提起された Bass 予想である。)

これらの途方もない予想によって、代数的  $K$  群は整数論 (数論幾何) において重要な不変量であることが広く意識されるようになった。これらの予想は、幸か不幸か、代数的  $K$  群を研究する多くの数学者に甚大な影響を与えたが、現在大きく発展しているのは「代数幾何 (スキーム) を、線型代数やホモトピー代数などの演算で理解しようと試みる」という、いわば機械的な方向性である。これは上記の予想のうち (a) を解決しようと企むものである。(ちなみに (a) は、厳密な意味ではまだ解決されていない。)

予想 (a) に比べて、予想 (b) は代数的  $K$  群そのものの構造や性質に深く関わっている。

残念ながら予想 (b) については、特別な場合を除けば、世界的に見て十分な進歩があったとはまだ言えない。いい方を変えると、予想 (b) はそれだけ難しい。

## 2. 研究の目的

代数多様体 (体上のスキーム) とは限らないより一般のスキーム (正則かつネーターな算術的スキーム) に対して、代数的  $K$  群と  $p$  進 Tate ひねりの関係について明らかにしたい。より具体的には以下の通りである。

(1) Chern 類写像を構成する。

(2)  $p$  進 Tate ひねり (エタール層の複体) をより一般のスキーム、あるいはスキームと因子の組に対して拡張する。

(3) 代数的  $K$  群をエタール  $K$  群で置き換えた際に、Atiyah-Hirzebruch 型のスペクトル系列ができるかを考える。

## 3. 研究の方法

ホモトピー不変性を **みたまない** ようなコホモロジー理論への Chern 類の理論を正しく定式化した文献はこれまでなかった。またそのような設定で Riemann-Roch の定理を正確に証明した文献もこれまでなかった。

研究開始当初の時点でよく知られていた (ホモトピー不変性を **みたま** ようなコホモロジー理論への) Chern 類の基本文献は Henri Gillet の 1980 年代の論文であるが、実はこの文献にはあやふやな議論が多く、特に Riemann-Roch の定理の証明は肝心なところをごまかしている。この分野を志す読者の理解を妨げていたことは想像に難くない。

そこで本研究では、Gillet の理論をすべて改訂することから始めた。これは上記研究目的の (1) だけでなく、(2) においても有用であ

った。なお、これらの研究を遂行するために、望月哲史氏(現中央大学非常勤講師)、三内顕義氏(現東京大学研究員)、植松哲也氏(現豊田工業高専助教)、小川竜氏(現東海大学助教)をパートタイム研究員として雇用し、中央大学において「モチーフ、代数的サイクル、代数的  $K$  理論セミナー」を組織・運営した。また、連携研究者である朝倉政典氏、木村俊一氏、斎藤秀司氏、山崎隆雄氏らとも連絡を密にとり、情報を交換した。

#### 4. 研究成果

##### (1) 許容的コホモロジーと Chern 類

(北海道大学の朝倉政典氏との共同研究)

スキームの代数的  $K$  群からコホモロジー理論への Chern 類写像を定式化するにはコホモロジー理論がどれくらいの条件をみたせば十分か? という素朴な問題設定から出発し、**許容的コホモロジー理論**の概念(公理)を定式化した。またそのようなコホモロジーへの Chern 類写像に対し、**Riemann-Roch の定理**を証明した。許容的コホモロジー理論はホモトピー不変性をみたさないようなコホモロジー理論を含む、かなり広い概念である。本研究ではさらに、正則スキーム  $X$  と正規交叉因子  $D$  の組  $(X, D)$  に関する対数的対の許容的コホモロジー理論を定式化した。また、補集合  $X-D$  の Grothendieck 群から  $(X, D)$  のコホモロジーへの Chern 類を構成し、Riemann-Roch の定理を証明した。

##### (2) モデュラス付き $p$ 進 Tate ひねりの構成

整数環上の(やや技術的な条件をみたす)正則スキーム  $X$  と有効 Cartier 因子  $D$  の組  $(X, D)$  に対し、 $D$  に沿ったモデュラスをもつ  $p$  進 Tate ひねりとよぶべきエタール層の複体  $T_n(r)_{X,D}$  を構成した。この複体は、補集合  $X-D$  の通常の  $p$  進 Tate ひねり  $T_n(r)_{X-D}$  の双対とよぶべきものである。実際に  $X$  が整数環上で固有な場合に、やや技術的な条件を仮定する

ことでこのような双対性を示した。また、Binda-Saito のモデュラス付きサイクル複体から  $T_n(r)_{X,D}$  へのサイクル写像(導来圏での射)を構成した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1. Uwe JANSEN, Shuji SAITO, Kanetomo SATO: *Étale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 査読有, **688** 巻, 2014, 1--66

2. Shuji SAITO, Kanetomo SATO: *Zero-cycles on varieties over  $p$ -adic fields and Brauer groups*. Annales Scientifiques de l'École normale supérieure 第4シリーズ, 査読有, **47** 巻, 2014, 505--537

3. Masanori ASAKURA, Kanetomo SATO: *Syntomic cohomology and Beilinson's Tate conjecture for  $K_2$* . Journal of Algebraic Geometry, 査読有, **22** 巻, 2013, 481--547

4. Kanetomo SATO: *Cycle classes for  $p$ -adic étale Tate twists and the image of  $p$ -adic regulators*. Documenta Mathematica, 査読有, **18** 巻, 2013, 177--247

[学会発表](計 12 件)

1. Kanetomo Sato:  *$p$ -adic étale Tate twists with negative log poles and with modulus* 平成 26 年 12 月 15 日(月) Motives in Tokyo 2014 (東京大学)

2. Kanetomo Sato: *Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance* 平成 26 年 10 月 10 日(金) 数論幾何、導来幾何の斬新な様相 (中央大学)

3. Kanetomo Sato: *Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance* 平成 26 年 9 月 1 日(月) 日台数論合同研究集会 (休暇村気仙沼大島)

4. 佐藤周友:  *$p$  進体上の多様体の Brauer-Manin ペアリングと Brauer 群の純粋性について* 平成 26 年 2 月 3 日(月) 慶應代数セミナー (慶應義塾大学)

5. 佐藤周友：対数的スムーズ族上の  $p$  進的隣接輪体の層について  
平成 25 年 11 月 8 日(金) 数論合同セミナー  
(京都大学)

6. 佐藤周友：ホモトピー不変性を仮定しないリーマン・ロッホの定理  
平成 25 年 6 月 14 日(金) 整数論・保型形式セミナー (大阪大学)

7. 佐藤周友：サイクルの次元関数について  
平成 25 年 3 月 15 日(金) 豊田中研数学コロキウム (豊田中央研究所)

8. 佐藤周友：ホモトピー不変性を仮定しないリーマン・ロッホの定理  
平成 25 年 3 月 15 日(金) 豊田中研数学コロキウム (豊田中央研究所)

9. Kanetomo Sato: *Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance*  
平成 24 年 12 月 12 日(水) Motives in Tokyo 2012 (東京大学)

10 Kanetomo Sato: *Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance*  
平成 24 年 11 月 1 日(木)  
 $p$ -adic cohomology and its applications to arithmetic geometry (東北大学)

11. 佐藤周友：算術的スキームのコホモロジーとレギュレーター写像  
平成 24 年 4 月 23 日(月) 中央大学代数セミナー (中央大学)

12. 佐藤周友：サイクルの次元関数  
平成 24 年 3 月 13 日(火)  
モチーフ、代数的サイクル、代数的  $K$  理論セミナー (中央大学)

〔図書〕(計 1 件)

1. 斎藤秀司, 佐藤周友：代数的サイクルとエタールコホモロジー (シュプリングァー現代数学シリーズ) 670 頁 丸善出版, 2012 年

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐藤周友 (SATO, Kanetomo)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：50324398

### (2) 連携研究者

1. 朝倉政典氏 (ASAKURA, Masanori)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60322286

2. 木村俊一氏 (KIMURA, Shun-ichi)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10284150

3. 斎藤秀司 (SAITO, Shuji)

東京工業大学大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50153804

4. 山崎隆雄 (YAMAZAKI, Takao)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00312794