様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 １２ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３３４０００６

研究課題名（和文）次数付ヘッケ代数と準遺伝被覆の研究

研究課題名（英文）Graded Hecke algebras and quasihereditary covers

研究代表者
有木　進（ARIKI，SUSUMU）

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：４０２１２６４１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　6,400,000円、（間接経費）　1,920,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では箙ヘッケ代数と呼ばれる次数付ヘッケ代数の表現論について研究を行った。箙ヘッケ代数は量子群の可積分加群の圏化を目的として導入された代数であり、研究当初はフォック空間の圏化の前提条件となるある種の非負性を証明したが、その後はアフィン型量子群の基本加群の圏化に研究を集中した。これまで長年にわたりアフィンＡ型以外は扱えていなかったが、今回の研究で他のアフィン型を扱えるようになり、有限箙ヘッケ代数に対するErdmann-Nakano型定理を証明した。とくに順表現型の場合は有限箙ヘッケ代数の詳しい解析が可能となるが、関連して２点対称特殊双列代数を分類した。

研究成果の概要（英文）：We studied representation theory of graded Hecke algebras which are called quiver Hecke algebras. The quiver Hecke algebras were introduced for the purpose of categorifying integrable modules over quantum groups. In the early stage of the research, we proved certain nonnegativity result which was a property necessary to hold when we speak of categorification of Fock spaces. After that stage, we focused on categorification of basic modules over quantum groups of affine type. We were only able to handle the affine type A for long time. In the current research, we have succeeded in handling other affine types than affine type A and we have proved Erdmann-Nakano type theorems for finite quiver Hecke algebras. In particular, it allowed us to analyze finite quiver Hecke algebras of tame representation type in detail. Related to this analysis, we have classified two point symmetric special biserial algebras.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：圏化　箙ヘッケ代数

１．研究開始当初の背景

Hecke 代数のモジュラー表現論は圏化理論の導入によって新たな展開が始まりHecke代数を用いたアフィン型Kac-Moody代数の可積分加群の圏化、Hecke 代数の準遺伝被覆代数を用いた Fock 空間の圏化等が興味の対象となっていた。Rouquier は基礎体が複素数体という仮定のもとで古典型複素鏡映群に付随する有理 Cherednik 代数の圏オーが円分Hecke 代数の準遺伝被覆代数の有限次元加群圏を与えることを示した。また、Khovanov とLauda は箙Hecke代数の導入によりアフィンＡ型以外のアフィン型への一般化の可能性を示したが、当時は箙Hecke代数が具体的に何次元の代数であるかや、直既約射影加群の組成列の計算例等の具体的な表現論的情報は NilHecke 代数の例を除けばまったく存在しない状況であった。そこで圏化理論の発展に寄与すべく、円分Hecke代数およびその一般化である円分箙Hecke代数のさらなる研究を進めようとしたのが研究開始当初の背景である。研究代表者は以前円分Hecke代数を用いて圏化理論を構築していたが、BrundanとKleshchevによってこの円分Hecke代数が円分箙Hecke代数の特別な場合であることが示されたため、円分箙Hecke代数を理解するための研究を計画することは研究上自然なことであった。

２．研究の目的

本研究計画ではArtin代数の表現論の手法を援用して、Ｂ型Hecke代数の準遺伝被覆代数を研究することを計画し、また円分箙 Hecke代数の表現論の研究、特に表現型や圏化に関する研究代表者の予想を示すことを目的とした。表現型とは、直既約加群の分類可能性を示す指標であり、有限表現型、順表現型、暴表現型の３種類に分かれる。この３種類のどの場合に当たるかを決定することは有限次元代数の表現論において基本的な問題である。本研究における圏化とは、Kac-Moody代数の最高重み可積分加群に対し重み空間をある代数の加群圏の Grothendieck 群の形で実現して、Kac-Moody 代数の作用を加群圏間の関手として実現することを言い、圏化として円分箙Hecke代数が取れることは上記１で触れた通りである。研究代表者はこれまでに行った研究に基づいていくつかの予想を持っており、その予想の証明を目的としたのである。また、Artin 代数の表現論の新たな応用を得ることはそれ自身意義あることであるので、本研究においては手法の開発自体も目的とした。

３．研究の方法

初年度は箙Hecke代数の表現論に関する種々の結果を改めて整理し、また中国科学院数学研究所のMing Fang氏からrelative tilting theoryの理論に関して知識提供を受け、またアフィンＡ型の箙Hecke代数に関する表現論の専門家であるAndrew Mathas氏を招き今後２年間の方向性に関し討論を行った。その後は低階数を中心に準遺伝被覆の分類を行うとともに、cellular代数の理論による一般化を試みた。準遺伝被覆は対称群のHecke代数に対する量子Schur代数の役割をする代数であり、圏化理論においても有用であることが期待されている。本研究では、cellular代数の帰納的構成に合わせて準遺伝被覆代数が構成される様子を低ランクの場合に計算しその計算結果から一般論を構築する方針で研究を行った。しかし当初の予定通りに研究が進まなかったことから次年度は初年度の方向性を継続するとともに、重点を円分箙Hecke 代数の特別な場合である有限箙 Hecke代数の研究に置いた。有限箙Hecke代数とはアフィン型を有限型の拡大 Dynkin 図形と思うとき、新しく付け加わった頂点０が与える基本重みを最高重みに持つ可積分加群、すなわち基本加群と呼ばれる可積分加群、の圏化に現れる円分箙Hecke代数である。圏化理論の文脈で対称群のHecke代数のブロック代数の自然な一般化になっている。研究の方法であるが、新しく現れた Kang と Kashiwara の結果を用いることで、従来から考えていたArtin 代数の表現論の手法と圏化理論の融合による研究手法が実際に動くことを示そうとした。ここで、KangとKashiwaraの結果とは、円分箙Hecke代数の誘導関手が完全関手であることの証明を言う。この年度に取った研究手法が適切であることが確かめられたので、最終年度でも上記の研究手法を継続し３種類のアフィン型有限箙Hecke代数に対しさらなる結果を得た。

４．研究成果

(1) Ｂ型ヘッケ代数のブロック代数の表現型に関する研究代表者の予想の解決は研究開始当初よりも現実味を帯びてきた。すなわち、本研究の研究成果として種々のアフィン型箙Hecke代数に対しErdmann-Nakano型の定理を証明した。ErdmannとNakanoは対称群に付随するHecke代数に対し、ブロック代数の表現型がブロック代数を定めるデータ（e-core、e-weight）を用いた組合せ論的記述を与えたのであるが、この記述は研究代表者が以前与えた圏化理論の用語で記述できる。故にこの記述が有限箙Hecke 代数による圏化の場合に拡張できるかは我々にとっては自然かつ重要な問いである。本研究では、基本加群の重み集合が基本重みのWeyl群軌道からnull rootで下がる形で記述できる ３ 種類のアフィン型Kac-Moody 代数を考察し、可積分加群の用語で有限箙Hecke代数の表現型を与える定理を証明し、この定理を Erdmann-Nakano 型定理と呼んだ。証明は本研究で開発した新しい手法に基づくものなので、この証明は本来のErdmannとNakanoの定理に対する別証明も与えている。

(2)研究開始当初の背景で述べたが、円分箙 Hecke 代数の次元は一般には未知である。そこで本研究で考察した３種類のアフィン型に対し、有限箙 Hecke 代数の次元公式を与えた。円分箙 Hecke 代数の定義に現れる冪等元で両側を挟んで得られる部分空間の次元公式を種々の Fock 空間を用いた計算で与え、その帰結として有限箙 Hecke 代数の次元公式を得たのである。この次元公式は上記(1)の研究でも証明の多くの場面で有効に使われた。円分箙 Hecke 代数の代数としての直既約性、対称代数性、直既約射影加群の組成列の記述などは知られていないわけであるが、本研究では有限表現型または順表現型の多くの例に対して直既約性、対称代数性を示した。その過程において鍵となる代数の基本代数の道代数としての具体的な記述を得た。不思議なことに順表現型の場合この記述には対称特殊双列代数が現れる。

(3)上記(2)で述べたように有限箙 Hecke 代数が順表現型の場合基本代数の道代数としての記述には特殊双列代数が現れる。そこで、既約加群が２つの対称特殊双列代数を分類した。古典的な対称群の Hecke 代数の場合は実際にこのリストに含まれる対称特殊双列代数のみが現れることが Scopes の結果より知られており、この結果の自然な拡張を意図したものである。また、アフィンＡ型で捩れがない場合の有限箙 Hecke 代数はパラメータを含むのであるが、このパラメータが非零の場合にこの拡張した結果が成り立つことを示した。

(4)さらに本研究に現れる対称特殊双列代数はかなり具体的なものであることから、より一般の順表現型有限箙 Hecke 代数に対しても特殊双列代数との間の安定圏同値の存在を用い直既約射影加群や既約加群の加群構造をかなり特定できることがわかり、アフィンＡ型で捩れがない場合に特殊双列代数より少し弱い性質である双列代数になることを示すことができた。

(5)連携研究者である大阪市立大学谷崎俊之教授および兼田正治教授とともに３年間に渡り大阪表現論セミナーを定期的に実施し、内外の研究者から研究成果の提供を受けるとともに、研究交流の中から表現論に関する新知見を得た。また連携研究者は表現論に関する研究成果を得て下記の通り査読有論文として発表した。

(6)中国上海の華東師範大学 Hebing Rui 教授および同済大学庄司俊明教授とともに 2012 年度は大阪大学、2013 年度は華東師範大学と同済大学を会場として Shanghai Workshop on Representation Theory を開催した。日本の若手研究者と中国の表現論研究者の交流を実現するとともに、将来の交流の発展の基礎を築いた。

(7)前回採択された研究計画の実施期間中に研究を開始したが論文出版に至らなかったアフィンＡ型 Hecke 代数のモジュラー分岐則の証明を査読有論文として出版した。内容はモジュラー分岐則が柏原結晶基底の記述と両立することを示したものである。この事実は自然ではあるが一般には柏原結晶の同型が恒等的とは限らないので非自明である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① <u>S. Ariki</u>、E. Park、Representation type of finite quiver Hecke algebras of type A^{(2)}_{2l}、J. Algebra、査読有、 397 巻、2014、457-488
② <u>S. Ariki</u>、E. Park、Representation type of finite quiver Hecke algebras of type D^{(2)}_{l+1}、Trans. Amer. Math. Soc.、査読有、掲載決定済
③ <u>M.Kaneda</u>、On a lemma of Samokhin、Algebr. Represent. Theory、査読有、16 巻、2013、 1159-1163
④ <u>T.Tanisaki</u>、Manin triples and differential operators on quantum groups、Tokyo J. Math. 、査読有、36 巻、2013、49-83
⑤ H.Andersen、<u>M.Kaneda</u>、Cohomology of line bundles on the flag variety for type G2、J. Pure Appl. Algebra、査読有、 216 巻、2012、1566-1579
⑥ <u>M.Kaneda</u>、Homomorphisms between neighboring G1T-Verma modules、Algebraic groups and quantum groups、105-113、Contemp. Math.、査読有、565 巻、 2012
⑦ <u>T.Tanisaki</u>、D-modules and representation theory、Lie theory and representation theory、177-219、Surv. Mod. Math.、査読有、2 巻、 2012
⑧ <u>T.Tanisaki</u>、Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity、Adv. Math.、査読有、230 巻、2012、2235-2294.
⑨ <u>S. Ariki</u>、N.Jacon、 C.Lecouvey、The modular branching rule for affine Hecke algebras of type A、Adv. Math.、査読有、228 巻、2011、481-526
⑩ M.Gros、 <u>M.Kaneda</u>、Contraction par Frobenius de G-modules、Ann. Inst. Fourier、査読有、 61 巻、2507-2542、2011
⑪ H.Andersen、<u>M.Kaneda</u>、Rigidity of

tilting modules、Mosc. Math. J.、査読有、 11巻、2011、1-39, 181

〔学会発表〕（計3件）

① S.Ariki、On the representation type and other properties of finite quiver Hecke algebras、Shanghai Workshop on Represent. Theory、2013年12月8日
② S.Ariki、Constructing a q.h. cover of a cellular algebra、Morningside Center, 中国科学院、Mini-Workshop on Comb. Represent. Theory、2012年6月11日
③ S.Ariki、Q.h. covers of Hecke algebras of type B2、Oberwolfach数学研究所、Modular Representations of Sym. Groups and Related Objects、2011年4月27日

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
とくになし

６．研究組織
(1)研究代表者
有木　進（ARIKI, Susumu）
大阪大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：４０２１２６４１

(2)研究分担者なし

(3)連携研究者
谷崎　俊之（TANISAKI, Toshiyuki）
大阪市立大学・理学研究科・教授
研究者番号：７０１４２９１６

兼田　正治（KANEDA, Masaharu）
大阪市立大学・理学研究科・教授
研究者番号：６０２０４５７５