

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 25 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340007

研究課題名(和文)量子可積分系に関連する代数的・組合せ論的構造の研究

研究課題名(英文)Studies of the algebraic and combinatorial structures related to quantum integrable systems

研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70221843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者尾角はSchilling, 坂本らとともに、D型の最高ウェイトパスと臙装配位との間の全単射を最も一般的な場合に構成した。これによって、 $X=M$ 予想は組合せ論的手法でも解決された。分担者中西はクラスター代数の量子可積分系に関連する側面の研究を共同研究者とともにを行い、 $T(Y)$ -systemの周期性、dilogarithm恒等式、完全WKB解析と変異の関係等を明らかにした。分担者国場は、研究開始時の目的には含まれていなかった3次元量子可積分系の研究を開始した。その後、尾角も含めた共同研究者とともに、量子座標環とPBW基底の関係、四面体方程式の2次元簡約、マルコフ過程への応用等の成果を上げた。

研究成果の概要(英文)：Principal investigator Okado constructed, with Schilling and Sakamoto, a bijection between highest weight paths and rigged configurations for type D in full generality, and thereby settled the $X=M$ conjecture in a combinatorial way. Nakanishi studied, with his collaborators, the cluster algebra from the aspect of quantum integrable systems and clarified the periodicity, dilogarithm identities, the relation between exact WKB analysis and mutation, etc. Although it was not included in the purposes of this project in the beginning of the project period, Kuniba started the study of 3-dimensional quantum integrable systems. Later, together with Okado and other collaborators, he produced results, such as the relation between quantum coordinate rings and PBW bases, 2-dimensional reduction of the tetrahedron equation, applications to Markovian processes.

研究分野：数学

キーワード：可積分系 量子群 クラスター代数 組合せ論的表現論

1. 研究開始当初の背景

量子群が量子可積分系、特に、2次元の統計力学モデルの可解性を理解する過程で生まれてきたことはよく知られている。1985年のDrinfeldと神保によるこの新しい代数の発見により、三角関数型の可解格子モデルの分類はアフィン量子群の有限次元表現の分類と等価となった。続いて、アフィン量子群の有限次元表現の分類はChariとPressleyにより1994年になされたが、その中に表現論的に大変興味深いクラスが存在することに気付いていたのは実は数理論物理学者であるKirillovとReshetikhinであった。彼らは、今ではKirillov-Reshetikhin加群(以下KR加群)と呼ばれる有限次元表現、および、それらのテンソル積が、可解格子モデルを解く伝統的な手法であるベータ仮説での状態の数え上げに由来する明示的な指標公式(フェルミ公式ともいわれる)をもつことを予想したのである。その後、このKR加群に関連して研究代表者、分担者らにより、のちの研究の道標となる重要な代数的構造や予想が提出された。

- (a) KR加群に対応する可解格子モデルの熱的ベータ仮説から導出された代数的構造であるT-system, Y-system
- (b) KR加群が柏原の意味での結晶基底をもつであろうという予想
- (c) Kirillov-Reshetikhinの指標公式のq-analogueであるX=M予想

これらの貢献は1990年代中頃から終わりにかけてのものであるが、量子可積分系や量子群の表現論・組合せ論の分野における一つの潮流を生み出した。たとえば(a)については、T-systemがアフィン量子群の有限次元表現のなすグロタンディック環におけるKR加群の関係式としてとらえられ、Frenkel-Reshetikhinによるq-指標の理論

を応用して、中島啓、Hernandezによりこの関係式が証明された。さらに、この進展がブレイクスルーになりKirillov-Reshetikhinの指標公式がDi Francesco-Kedemにより最終的に証明された。また、T-system, Y-systemはcluster代数との関係が見出され、この周辺では目覚ましい進展が続いていた。(b)に関連しては、KR加群の結晶基底(KRクリスタル)から箱玉系と呼ばれる可積分セルオートマトン(超離散可積分系)が系統的に構成され、(c)のX=M予想を組合せ論的に説明する全単射が、対応する系の運動を線形化することがわかっていった。超離散可積分系はもともとソリトン方程式の超離散化の観点から研究が進められてきたが、量子群の表現論・組合せ論の観点からの研究も加わることになり、より一層の進展がもたらされた。

2. 研究の目的

20年程前に量子可積分系に関連する代数的・組合せ論的構造の研究から生まれた概念や予想(Kirillov-Reshetikhin加群、T(Y)-system, KRクリスタル、X=M予想)について、重要な進展が続いている。この進展に深く関与する研究者同士で緊密なグループを組織して、最近の成果を整理し、あと一息で解決できそうな課題(KRクリスタルの存在、X=M予想)については解決を図り、ただちに応用できる分野(超離散可積分系、トロピカル幾何)には応用する。さらに、これらの研究過程で今後10年間のこの分野における研究の道標となるような概念や予想を導出することを目指す。

本研究では5年間の研究期間の間に特に次の4点を重要課題において研究を行う。

例外型KR加群の結晶基底の存在証明、および、その組合せ論的構造の決定

非例外型のランクに関する制限がない場合のX=M予想の解決

の結果の超離散可積分系への応用、

トロピカル幾何との関係の探究

cluster 代数での成果を KR 加群、さらには可積分系へのより詳しい理解につなげること

3. 研究の方法

まず研究目的 については、例外型アフィン量子群のある一つの系列（随伴系列）の KR 加群については、すでに系統的に結晶基底の存在はわかっている。さらに、2010年2月に始めた Fourier, Schilling との共同研究で、E6型KRクリスタルの組合せ論的構造についてもすでにデータが出てきている。このデータを詳細に吟味し、Misra との共同研究で得られた G2型、 $D4^{(3)}$ 型の結果も参考にして、E6型の場合の組合せ論的構造を決定する。E6型がすめば、E7,E8型へと解析を進める。cluster 代数はアフィン量子群の有限次元表現のグロタンディック環と関係しているため、分担者の中西とよく議論する。

については、まずランクが十分大きいときの証明を再検討することが必要になる。Xの側をA型のXに帰着した Lecouvey と Shimozono との研究では、反転可能なディンキン図をもつアフィン量子群のKRクリスタルがディンキン図の反転と両立する自己同型をもつことが基本的であった。XはKRクリスタルのテンソル積の最高ウェイト元をある重みをつけて足しあげた母関数であるが、この重みを計算する関数が自己同型に関してある単純な関係式をもつことがカギだったのである。申請時に、この関係式がランクが十分大きいときだけでなくまったく一般の場合にも成り立つことが実験によりわかってきた。一方で、M側でのこのような簡単な関係はまだ不明である。この点についてまず検討を重ねる。また、この問題には別のルートからのアプローチもある。Kirillov-Schilling-Shimozono によるA型のX=M予想の解決にみるように、Xの各項を

定義する組合せ論的対象物とMの方のそれとの間に直接全単射を構成するのである。この方法を適用するためにはKRクリスタルを列スプリットすることが必要になるのだが、申請時現在 Schilling と坂本とで可能性を検討している。

列スプリットがきちんと定義されればD型の場合のX=M予想に本格的に取り組むことになるだろう。非例外型におけるD型の役割は非常に基本的で、本質的な困難はすべてD型に含まれていると考えられるからである。またこのテーマに関しては、XのKR加群とは限らない有限次元表現のテンソル積への拡張の問題がある。この拡張した多項式を厳密に定義すれば、Kazhdan-Lusztig 多項式、Macdonald 多項式等既知の重要な多項式とも関係していることが予想され、新しい研究の萌芽となる。この可能性についても挑戦する。

については、分担者の国場がいちばん詳しいので、代表者のKRクリスタル、X=M予想に関する研究成果を検討してもらい、必要に応じて研究協力者を加えることにより研究を進める。超離散可積分系への応用は、X=M予想が解決すれば急速に進展する。X=Mを組合せ論的に説明する全単射が、対応する超離散可積分系を線形化するからである。なお、この枠組みはアフィン量子群が例外型の場合でも成立することが十分予想されるので検討を開始する。

の cluster 代数との関係については、分担者の中西が詳しいので、まず中西に国内外における cluster 代数の研究動向を探ってもらい、特に dilogarithm 恒等式、T(Y)-system との関係を整理してもらおう。必要に応じて分担者の国場もこれに参加する。この分野は進展著しく、また興味をもっている研究者も多いので、23年度の秋に勉強会の性格をもった研究会を開く。

最後になったが、国内外の関連分野の学

術動向を調べたり、研究グループ内の意見交換をするために、国際研究集会、小研究会を毎年開催する。代表者、分担者の3人が中心となり、緊密に連絡を取りあって準備する。規模やテーマ等については、学術動向や研究計画の進展状況に応じて柔軟に対応する。

4. 研究成果

まず「研究の目的」に記した項目 ~ に従って関連する成果を列挙する。

項目 について研究代表者尾角は、非例外型アフィン型に対応するすべてのKRクリスタルが単純であることと、相似性をもっていることを示した[雑誌論文]。

項目 については、尾角が坂本、Schilling とともに、D型のKRクリスタルに対して列スプリットを定義した[雑誌論文]。その後これを突破口として、尾角は坂本、Schilling, Scrimshaw とともに、アフィンD型の場合のパスと臙装配位との間の全単射の構成問題を解決した[preprint]。例外型のE6については、学生の佐野とともに研究した[雑誌論文]。

項目 については、尾角が Misra およびその学生である Wilson とともに、例外型アフィンリー代数 $G_2^{(1)}$ に付随する可積分セルオートマトンを調べ、系に存在するソリトンの種類や2つのソリトンの散乱則についての結果を出した。また、尾角はKirillov-Schilling-Shimozono全単射の相似性を調べ、この写像の連続化を考察した。

項目 については中西が主に担当した。cluster 代数をKR加群の理解に結びつける研究はならなかったが、それを補って余りある成果が得られた。まず Kashaev との共同研究により、量子団代数の周期性に付随する量子 dilogarithm 恒等式の種々の表示(局所形、トロピカル形、普遍形)を導出した。さらに、局所形から量子力学的手法によって半古典近似として古典 dilogarithm 恒等式が得られることを示した[雑誌論文]。さらに nilpotent double affine Heck 代数に現れるダイログ恒等式の証明、有限型団代数の変異同値と c ベクトルの明示的記述[雑誌論文]、sine-Gordon Y-system に対する周期性とダイログ恒等式の証明などの結果を得た。また平成25年度には岩木との共同研究で、完全WKB解析における変異理論の研究を開始し、StokesグラフやVorosシンボルの変異が団代数の変異とその一般化により記述されることを明らかにした[雑誌論文]。

研究開始当初には想定できなかった成果もいくつか得られた。以下に列挙する。

(a) 国場は、四面体方程式の解を特殊化した

ものが B, Dおよび捻れD型量子アフィンリー環のスピン表現の量子R行列に一致する事を証明した。

(b) 国場・尾角は、C3型量子座標環の表現論を用いて3次元反射方程式の解の明示式を求めた[雑誌論文]。3次元反射方程式の非自明解は今までに見つかっておらず、この解が最初の解となった。

(c) 国場・尾角は研究協力者の山田泰彦とともに、有限次元単純リー環に付随する量子座標環の Intertwiner が、対応する量子展開環のべき零部分代数の Poincare-Birkhoff-Witt 型基底間の基底変換行列に一致することを示した[雑誌論文]。この研究は量子群、特に、量子座標環に関する興味深い研究をいくつか誘発することになった。

(d) 国場・尾角・Sergeev は四面体方程式の2次元簡約を考察し、量子アフィン代数の q -振動子表現や一般化量子群の表現などが現れることを見出した[雑誌論文]。

(e) 国場・丸山・尾角は相互作用する多種粒子系として記述される新しい1次元系マルコフ過程を定式化した。結晶基底理論と四面体方程式を応用して定常状態の行列積による構成を与え、遷移確率が非一様な場合への拡張を行った[雑誌論文]。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計35件)

Atsuo Kuniba, Shouya Maruyama and Masato Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **49** (2016) -, DOI:10.1088/1751-8113/49/11/114001 [査読有]

Atsuo Kuniba, Masato Okado and Sergey Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **48** (2015) -, DOI:10.1088/1751-8113/48/30/304001 [査読有]

Tomoki Nakanishi, Structure of seeds in generalized cluster algebras, Pacific Journal of Mathematics, **277** (2015) 201-202,

DOI:10.2140/pjm.2015.277.201 [査読有]

Atsuo Kuniba, Masato Okado and Sergey Sergeev, Tetrahedron equation and quantum R matrices for modular double of $U_q(D^{(2)}_{n+1})$, $U_q(A^{(2)}_{2n})$ and $U_q(C^{(1)}_n)$, Letters in Mathematical Physics, **105** (2015) 447-461, DOI: 10.1007/s11005-015-0747-0 [査読有]

Atsuo Kuniba and Masato Okado, Tetrahedron equation and quantum R matrices for q-oscillator representations of $U_q(A^{(2)}_{2n})$, $U_q(C^{(1)}_n)$ and $U_q(D^{(2)}_{n+1})$, Communications in Mathematical Physics, **334** (2015) 1219-1244, DOI:10.1007/s00220-014-2147-1 [査読有]

Kohei Iwaki and Tomoki Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **47** (2014) -, DOI:10.1088/1751-8113/47/47/474009 [査読有]

M. Okado, Simplicity and similarity of Kirillov-Reshetikhin crystals, Contemporary Mathematics, **602** (2013) 183-194, DOI:10.1090/conm/602/12022 [査読有]

A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, A common structure in PBW bases of the nilpotent subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$ and Quantized algebra of Functions, SIGMA, **9** (2013) 049(23 pages), DOI:10.3842/SIGMA.2013.049 [査読有]

Tomoki Nakanishi, Salvatore Stella, Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type, Electronic Journal of Combinatorics, **21** (2014) 107 pages [査読有]

M. Okado and N. Sano, KKR type bijection for the exceptional affine algebra $E_6^{(1)}$, Contemporary Mathematics, **565** (2012) 227-242, [査読有]

M. Okado, R. Sakamoto and A. Schilling, Affine crystal structure on rigged configurations of type $D_n^{(1)}$, Journal of Algebraic Combinatorics, **37** (2013) 571-599, DOI:10.1007/s10801-012-0383-z [査読有]

Tomoki Nakanishi, Andrei Zelevinsky, On tropical dualities in cluster algebras,

Contemporary Mathematics, **565** (2012) 217-226, [査読有]

Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Types B_r , Publication of RIMS, **49** (2013) 1-42, DOI:10.4171/PRIMS/95 [査読有]

A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **45** (2012) 465206 (27pp) [査読有]

B. Lecouvey, M. Okado, M. Shimozono, Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig q-analogues, Mathematische Zeitschrift, **271** (2012) 819-865, DOI:10.1007/s00209-011-0892-9 [査読有]

A. Kuniba, T. Takagi, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 135204 22 pages, DOI:10.1088/1751-8113/44/13/135204 [査読有]

R.M. Kashaev, T. Nakanishi, Classical and quantum dilogarithm identities, SIGMA, **7** (2011) 102-131 [査読有]

[学会発表](計39件)

Masato Okado, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, 8th southeastern Lie Theory workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory, 2015年10月11日, Raleigh (USA)

Tomoki Nakanishi, On generalized cluster algebras, The Ninth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2015年4月1日~4月4日, Athens (USA)

Masato Okado, Similarity of Kirillov-Reshetikhin crystals and its applications, ICM 2014 Satellite Conference on Representation Theory and Related Topics, 2014年8月8日, Daegu (South Korea)

Atsuo Kuniba, Tetrahedron equations and quantum R

matrices for q-oscillator representations
XXXth International Colloquium on Group
Theoretical Methods in Physics, 2014年7
月17日, Ghent (Belgium)

Tomoki Nakanishi,
Exact WKB analysis and cluster algebras,
4TH Workshop on Combinatorics of Moduli
Spaces, Cluster Algebras, and Topological
Recursion, 2014年5月26日~5月31日,
Moscow (Russia)

Masato Okado,
PBW bases and quantized algebra of
functions, RIMS 研究集会「超弦理論、表現
論、可積分系の数論」, 2013年7月31日, 京
都大学(京都府京都市)

Atsuo Kuniba,
Towrad 3D integrability from quantum group
Journal of Physics A: Mathematical and
Theoretical, Scientific Meeting 2013,
2013年4月15日, London (UK)

Tomoki Nakanishi,
Exact WKB analysis and cluster algebras
Workshop "Cluster algebras and related
topics", 2013年12月8日, Oberwolfach
(Germany)

尾角正人,
アフィン量子群の有限次元表現について,
第57回代数学シンポジウム, 2012年8月
20日, 京都大学(京都府京都市)

Atsuo Kuniba,
Tetrahedron and 3D reflection equations
from quantized algebra of functions, The
XXIX International Colloquium on
Group-Theoretical Methods in Physics,
2012年8月21日, Tianjin (China)

Tomoki Nakanishi,
Diagrammatic description of c-vectors and
d-vectors of cluster algebras of finite
type, Cluster Algebras in Combinatorics,
Algebra, and Geometry, 2012年10月30日,
Berkeley (USA)

Masato Okado,
Open problems related to
Kirillov-Reshetikhin crystals, BIRS
Workshop "Twenty-five years of
representation theory of quantum groups",
2011年8月9日, Banff (Canada)

Atsuo Kuniba,
Tropical Bethe ansatz and ultradiscrete

integrable systems I-V, International
Workshop on Tropical and Quantum Geomet
ries, 2012年2月20-24日, 京都大学(京都府
京都市)

Tomoki Nakanishi,
Classical and quantum dilogarithm
identities I-III, IA11 Winter School:
Quantum cluster algebras and related
topics, 2011年12月20, 21日, 大阪大学(大
阪府豊中市)

〔図書〕(計1件)
国場敦夫、朝倉書店、ペーテ仮説と組合せ
論、2011年、218ページ

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70221843

(2) 研究分担者

国場 敦夫 (KUNIBA, Atsuo)
東京大学・大学院総合文化研究科・教授
研究者番号: 70211886

中西 知樹 (NAKANISHI, Tomoki)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 80227842

(3) 連携研究者

山田 泰彦 (YAMADA, Yasuhiko)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00202383

(4) 研究協力者

Anne SCHILLING
カリフォルニア大学デーヴィス校・数学
科・教授