

平成 28 年 5 月 18 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340008

研究課題名(和文) 対数的混合ホッジ理論の研究とその応用

研究課題名(英文) Theory of mixed log Hodge structures and its applications

研究代表者

臼井 三平 (USUI, Sampei)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：90117002

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：混合版 $SL(2)$ -軌道の空間と対数的混合ホッジ構造の良モジュライを構成した。後者の幾何への応用として構成したネロンモデルの複数の切断の共通部分の解析性を証明した。任意に与えられた許容ノーマル関数を受け止めるネロンモデルを構成した。これらの物理への応用として、3次元5次超曲面の閉および開ミラー対称性の記述をした。以上は全て出版された。

混合版として新たに出てくる比構造付冪零 $i$ -軌道の空間、星付混合版 $SL(2)$ -軌道の空間を補って、純重みのときの基本図式を増強し、周期写像やノーマル関数の様々な極限を比較することができる混合版の基本図式を完成させた(投稿中)。

研究成果の概要(英文)：In mixed case, we constructed spaces of  $SL(2)$ -orbits, fine moduli of log mixed Hodge structures. As geometric applications, we constructed Neron models and showed analyticity of the common zeros of sections of the Neron model. We also constructed a Neron model which accepts any given admissible normal function. As applications of these results to physics, we describe closed and open mirror symmetry for quantic 3-folds. All of these results are published.

In mixed case, supplementing spaces of nilpotent  $i$ -orbits with ratio structure and spaces of  $SL(2)$ -orbit with star, we completed an amplified fundamental diagram by which various limits of period maps and normal functions are compared. These results are submitted and available from arXiv.

研究分野：数理系科学

キーワード：ホッジ理論 モジュライ コンパクト化 混合対数的ホッジ構造 混合版基本図式 ネロン  
モデル ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

加藤・臼井の本(2009年出版)の内容は次の通りである。Mumfordらのエルミート対称領域の離散群による商のトロイダル・コンパクト化を一般化し、対数的ホッジ構造の分類空間(Griffithsのレポート以来、加藤・臼井空間と呼ばれるようになっていた)を構成した。また、ホッジ構造の分類空間のボレル・セールコンパクト化、SL(2)部分コンパクト化なども構成し、これら相互の関係を示す基本図式を構成した。

さらに中山も加わって先の理論の混合版への一般化を企画し、次の成果を上げてきた。  
0. SL(2)-orbit theorem (2008年出版). I. Bore-Serre spaces (2009年出版). II. Spaces of SL(2)-orbits (2010 受理). III. Spaces of nilpotent orbits (2010年10月投稿). これらの空間は、先の純重みの場合の基本図式の上に乗っていて、8つあるそれぞれの空間の上のファイバーとして、中間ヤコビ多様体、レギュレーター、ポアンカレ束、等々のトロイダル部分コンパクト化、SL(2)部分コンパクト化、ボレル・セールコンパクト化等を与えている。

2. 研究の目的

次のような項目について研究する。  
混合版CKS写像の可微分性、混合版基本図式の完成、ネロンモデル、対数的中間ヤコビ多様体、完備弱扇予想、許容ノーマル関数の零点集合の解析性、対数的スムーズ変形の混合版、その周期写像の微分についてのGriffiths型公式、高次準像上の対数的混合ホッジ構造と特異ファイバーの関係。

また、対数的混合ホッジ理論の応用として、次の分野との関係を探っていく。  
鏡対称性、ホッジ予想、保型コホモロジーと表現論、ツイスター理論。

3. 研究の方法

加藤、中山、臼井が「対数的ホッジ班」を構成し、研究目的欄に記した前半の研究を進める。これを全期間通じての研究計画の中核として据え、日常はメールを使い、必要に応じて出会うセミナーを開く。

研究目的欄に記した後半の応用については、「ホッジ班」、「モジュライ班」、「ミラー班」が適宜連携して研究を進める。

4. 研究成果

加藤・中山・臼井による混合ホッジ構造の分類空間の拡張に関する共同研究が進んでおり、混合版ボレル・セールコンパクト化(Ⅰとして2009年出版)、混合版SL(2)-軌道の空間(Ⅱとして2011年出版)、そして対数的混合ホッジ構造の分類空間(Ⅲとして2013年出版)を構成した。

さらに、Ⅲの幾何への応用として構成していた弱扇によるネロンモデルのいくつかの切断の共通部分の閉包の解析性を証明した(2011年に出版)。また、任意の与えられた許容ノーマル関数を受け止めるネロンモデルを構成した(2014年に出版)。

臼井は、以上の共同研究の結果を3次元5次超曲面に対するミラー対称性の研究へ応用して、次の結果を得た。対数的ホッジ構造の良モジュライの理論を使い、AモデルとBモデルの対数的周期写像の一致として閉ミラー対称性の具体的な記述をし(2014年出版)。この結果と、対数的混合ホッジ構造の良モジュライとしてのネロンモデルの理論を使い、AモデルとBモデルの対数的ノーマ

ル関数の一致として開ミラー対称性の定式化をした(2016年出版)。

加藤・中山・臼井による共同研究では引き続き、Ⅰ, Ⅱ, Ⅲの空間に加えて、混合版として新たに出てくる比構造付霧零軌道の空間、星付混合版SL(2)-軌道の空間を構成し、これらの空間相互を関係付ける混合版の補強された基本図式を完成させた。また、弱退化のときにはダイヤモンド付混合版SL(2)-軌道の空間を構成して、精密化した混合版の基本図式を完成させた。これはノーマル関数の情報も含んだ周期写像のさまざまな極限の間の関係を記述している基本的な枠組とみることができる。これらの結果はⅣとして2016年2月に専門誌に投稿し、arXivにも掲載した。

以上の理論を群作用付の場合へも拡張し、その幾何への応用として、マンフォード・テイト領域、志村多様体、高次アルバネーゼ多様体等の部分コンパクト化を作った。この結果の速報は2015年12月に専門誌に投稿し、arXivにも掲載した。

中山は底空間が2次元のときのネロンモデルを構成した(2012年、2015年出版)。中山は梶原・加藤と続けている対数的アーベル多様体についての共同研究で、そのシリーズⅢ: 対数的楕円曲線とモジュラー曲線、Ⅳ: 固有モデル、について成果を上げた(2013年、2015年出版)。中山はIllusie・辻と共同でOn log flat descentを研究した(2013年出版)。中山はまた藤澤との共同研究で、標準的対数構造付点上の幾何的対数構造について研究した(2015年出版)。

池田はホッジ理論の立場から、射影空間内の超曲面に対する接線のなす多様体について研究し(2012年出版)。またヘシアンで分岐する3次曲面の二重被覆を研究した(2014年出版)。

今野は正規曲面の特異点に付随するヤウサイクルを研究し(2012年出版)。またスムーズ多重曲線の1次元線形系について研究した(2015年出版)。

足利は巡回オビフォルドのトーリック変換とデデキント和に関するザギエ相互律の拡張版を研究した(2015年出版)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計38件)

(1) Usui, S., Studies of closed/open mirror symmetry for quintic threefold through log mixed Hodge theory, in Recent Advances in Hodge Theory, London Math. Society Lect. Note 427, 2016, 134-164. 査読有

(2) C. Nakayama, Log Neron models over surfaces, II, Hokkaido Math. J. 44 (2015), 365-385. 査読有, open access 有.

(3) K. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part IV: Proper models, Nagoya Math. J. 219, 2015, 9-63. 査読有

(4) T. Fujisawa and C. Nakayama, Geometric log Hodge structures on the standard log point, Hiroshima Math. J. 45, 2015, 231-266. 査読有

(5) Kazuhiro Konno, A note on smooth multiple fibers in pencils of algebraic curves, Nihonkai Math. J. 26 (2015), 103--120. 査読有

- (6) T. Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and extended Zagier reciprocity for Dedekind sums, *Tohoku Math. J.* 67, 2015, 323-347. 査読有
- (7) Usui, S., A study of mirror symmetry through log mixed Hodge theory, in "Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory", *Contemp. Math.* 608, AMS, 2014, 285-311. 査読有
- (8) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Neron models for admissible normal functions *Proc. Janan Acad., Ser. A*, 90, 2014, 6-10. 査読有
- (9) Ikeda, A., The double cover of cubic surfaces branched along their Hessian, *Internat. J. Math.* 25 (2014), 1450075 (34 pages), 査読有  
DOI: 10.1142/S0129167X1450075X,
- (10) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits, *J. Alg. Geom.*, 22, 2013, 671-772. 査読有
- (11) C. Nakayama, Log Neron models over surfaces, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 19, 2012, 613-659. 査読有
- (12) L. Illusie, C. Nakayama, and T. Tsuji, On log flat descent, *Proc. Japan Academy, Ser. A* 89 (1), 2013, 1--5. 査読有
- (13) T. K. ajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part III: Logarithmic elliptic curves and modular curves, *Nagoya Math. J.*, 210 (2013), 59-81. 査読有
- (14) Konno, K., On the Yau cycle of a normal surface singularity, *Asian J. of Math.* 16, (2012), 279--298. 査読有
- (15) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Analyticity of the closures of some Hodge theoretic subspaces, *Proc. Janan Acad., Ser. A*, 87, 2011, 167-172. 査読有
- (16) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, II: Spaces of  $SL(2)$ -orbits, *Kyoto J. Math.* 51-1: Nagata Memorial Issue, 2011, 149--261. 査読有
- (17) Ikeda, A., The varieties of tangent lines to hypersurfaces in projective spaces, *Comm. in Algebra*, 40, 2012, 3716-3725. 査読有  
DOI: 10.1080/00927872.2011.594134

[学会発表] (計 53 件)

- (1) Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, IV: The fundamental diagram (with K. Kato, C. Nakayama), Complex, p-adic, and logarithmic Hodge theory and their applications, 2016/03/10, Stony Brook Center of Geometry and Physics, NY, USA. 招待講演
- (2) Usui, S., Extended period domains and algebraic groups (with K. Kato, C. Nakayama), The 3rd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities FJV 2015, 2015/11/30 - 2015/12/04, Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Mathematics, Hanoi, Vietnam, 招待講演
- (3) C. Nakayama, Relative log Poincare duality, Algebraic Geometry - A conference in honor of Arthur Ogus on the occasion of

his 70th birthday, 2015.9.25, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (パリ). 招待講演

- (4) 今野一宏, 一般型代数曲面の多重標準写像と標準環, 第 60 回代数学シンポジウム, 2015 年 9 月 1 日, 静岡大学. 招待講演
- (5) Takahashi, A., From Calabi--Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms, String field theory of the B-model, Center for Geometry and Physics (Korea), 2016 年 1 月 9 日. 招待講演
- (6) Takahashi, A., From Calabi--Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1, Steklov Mathematical Institute (Russia), 2015年9月17日. 招待講演
- (7) Usui, S., A study of open mirror symmetry for quintic threefold through log mixed Hodge theory, The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2014年8月29日, 北海道大学, 招待講演
- (8) Usui, S., Studies of closed/open mirror symmetry for quintic threefold through log mixed Hodge theory, 2014 年 6 月 3 日-5 日, Korea Institute for Advanced Study Seminar (3 talks), 招待講演
- (9) Nakayama, C., Log abelian varieties (Survey), RIMS Workshop: Algebraic Number Theory and Related Topics, 2014.12.1--5 (話した日は 12/1), 京都大学. 招待講演
- (10) Fujiki, A., Donaldson-Friedman degeneration of anti-self-dual hermitian structures and Lee classes. Workshop "Complex Geometry and Lie groups", University of Torino, 2014.6.22, 招待講演
- (11) Fujiki, A., "On bihermitian structures on Kato surfaces", Complex Geometry, Analysis and Foliations, International Center for Theoretical Physics (Trieste), 2014.10.3, 招待講演
- (12) Takahashi, A., Mirror symmetry for orbifold projective lines and extended cuspidal Weyl group, Geometry from stability conditions, University of Warwick (UK), 2015 年 2 月 17 日. 招待講演
- (13) Usui, S., Studies of closed/open mirror symmetry for quintic 3-folds through log mixed Hodge theory, RIMS 共同研究「ミラー対称性の展望」, 2013/12/24-26, 京都大学数理解析研究所, 招待講演
- (14) Usui, S., Studies of closed/open mirror symmetry for quintic threefolds through log mixed Hodge theory, Workshop on Hodge theory in string theory, 2013/11/18--22, Fields Institute, Toronto, 招待講演
- (15) Usui, S., Study of mirror symmetry through log mixed Hodge theory, Recent advances in Hodge theory: Periods, Algebraic Cycles, and Arithmetic, June 10 - 20, 2013, Vancouver, BC, CANADA, 招待講演
- (16) Nakayama, C., Degeneration of normal functions and log mixed Hodge theory, 2013.8.28, 第 58 回代数学シンポジウム, 2013.8.26--29, 広島大学, 招待講演
- (17) Kazuhiro Konno, On the fixed part of a non-special linear system over a normal

surface singularity, 国際研究集会 “Classification of Algebraic Varieties and Related Topics”, Cetraro, Italy, 2013年9月9日, 招待講演

(18) Fujiki, A., Examples of homologically trivial rational curves on certain Moishezon twistor spaces (代数幾何学シンポジウム) “Classification of algebraic varieties and related topics”. 2013.9.14, Cetraro, Italy, 招待講演

(19) Takahashi, A., Orbifold projective lines and extended cuspidal Weyl group, Workshop on B-model aspects of Gromov-Witten Theory, University of Michigan (USA), 2014年3月6日. 招待講演

(20) Takahashi, A., On the classical mirror symmetry of orbifold projective lines, RIMS 共同研究「ミラー対称性の展望」, 京都大学数理解析研究所, 2013年12月24日. 招待講演

(21) Takahashi, A., Orbifold projective lines and extended cuspidal Weyl group, Hamiltonian PDEs, Frobenius Manifolds and Deligne Mumford Moduli Spaces, SISSA di Trieste (ITALY), 2013年9月16日. 招待講演

(22) Takahashi, A., Algebra and Geometry of LG orbifolds for invertible polynomials in three variables, Matrix Factorizations in Algebra, Geometry, and Physics, Mathematisches Forschungsinstitut Obelwofach Schwarzwald (GERMANY), 2013年9月5日. 招待講演

(23) Takahashi, A., Mirror symmetry of orbifold projective lines and invariant theory of extended cuspidal Weyl groups, RIMS workshop 「Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics」, 京都大学数理解析研究所, 2013年7月2日. 招待講演

(24) Takahashi, A., Categories of Matrix Factorizations for Elliptic Landau-Ginzburg Orbifolds, Workshop on Matrix factorizations, Universitaet Wien (AUSTRIA), 2013年5月14日. 招待講演

(25) 臼井三平, A study of mirror symmetry through log mixed Hodge theory, 特異点と多様体の幾何学, 山形大学, 2012/08/24, 招待講演

(26) 臼井三平, Studying mirror symmetry through log mixed Hodge theory, Hodge theory and algebraic geometry, 東京電機大学, 2012/08/02, 招待講演

(27) Usui, S., Studying mirror symmetry through log mixed Hodge theory, Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory; Texas Christian University, USA, 2012/06/21, Organizers: Robert S. Doran, Greg Friedman, Scott Nollet, 招待講演

(28) Usui, S., Log mixed Hodge theory; feeling relation with mirror symmetry, Topology of singularities and related topics, III, Mar. 26-30, 2012, University of Dalat, Vietnam, 招待講演

(29) 臼井三平, Log mixed Hodge theory; feeling relation with mirror symmetry (with K. Kato, C. Nakayama), 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2012年3月17日, 九州大学, 招待講演

(30) 今野一宏, Normal sextic surfaces which are canonical, "WCU workshop on classification and construction of

algebraic varieties", Busan (Korea), 2012/5/26, 招待講演

(31) T. Ashikaga, Toric modification of cyclic orbifolds and Dedekind sums, WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties, Busan, KOREA, 2012 March 26. 招待講演

(32) 足利正, Toric modification of cyclic orbifolds and extended Zagier reciprocity for Dedekind sums, 代数学シンポジウム 2012 (京都大学数理解析研究所), 2012年8月22日. 招待講演

(33) Takahashi, A., Classical Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Linking representation theory, singularity theory and non-commutative algebraic geometry, Banff International Research Station (CANADA), 2012年5月11日. 招待講演

(34) Takahashi, A., Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Singularity Theory and Integrable Systems, Mathematisches Forschungsinstitut Obelwofach Schwarzwald (GERMANY), 2012年4月23日. 招待講演

(35) Usui, S., Log mixed Hodge theory; feeling relation with mirror symmetry (with K. Kato, C. Nakayama), Hodge theory and string duality (11w5090), Dec. 7, 2011, BIRS, Banff, Canada, 招待講演

(36) 臼井三平, Z-structures in log mixed Hodge theory, 代数学シンポジウム, 2011年8月10日, 岡山大学, 招待講演

(37) 臼井三平, 鏡映5次3次元多様体の対数的混合ホッジ理論からの眺め, 京都大学大学院理学研究科数学専攻・数理解析研究所 共同談話会, 2011年7月6日, 京都大学, 招待講演

(38) Usui, S., Log mixed Hodge theory and applications (joint with K. Kato and C. Nakayama), Log Hodge theory and elliptic invariants, IPMU, Kashiwa campus, The University of Tokyo, Japan, 2011, 2, 24, 招待講演

(39) Usui, S., Log mixed Hodge theory and applications (joint with K. Kato and C. Nakayama), JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects, Topology of singularities and related topics, II, Sendai, Japan, January 6, 2011, 招待講演

(40) Kazuhiro KONNO, Regular canonical surfaces of degree  $3n-3$  in  $P^n$ , Parts I and II, Two Weeks of Classical Algebraic Geometry, Univ. Padova, May 16--25, 2011. (発表は5月16日と23日). 招待講演

(41) Takahashi, A., Mirror symmetry between orbifold curves and cusp singularities with group action, Workshop on Matrix Factorizations, 2011年5月8日, Universitaet Bielefeld. 招待講演

〔図書〕(計3件)

- (1) 今野一宏, 共立出版, リーマン面と代数曲線, 2015年, 272ページ.
- (2) 今野一宏, 「代数方程式のはなし」内田老鶴圃, 2014年4月, (143ページ) ISBN-13: 978-4753602025
- (3) 今野一宏, 「代数曲線束の地誌学」内田老鶴圃, 2013年2月, 280 pages

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

臼井 三平 (USUI, Sampei)  
大阪大学・その他部局等・名誉教授  
研究者番号： 90117002

(2) 研究分担者

中山 能力 (NAKAYAMA, Chikara)  
一橋大学・大学院経済学研究科・教授  
研究者番号： 70272664

(3) 研究分担者

今野 一宏 (KONNO, Kazuhiro)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号： 10186869

(4) 研究分担者

足利 正 (ASHIKAGA, Tadashi)  
東北学院大学・工学部・教授  
研究者番号： 90125203

(5) 研究分担者

藤木 明 (FUJIKI, Akira)  
大阪大学・その他部局等・名誉教授  
研究者番号： 80027383

(6) 研究分担者

小木曾 啓示 (OGUIISO, Keiji)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号： 40224133  
(平成 23 年 4 月～平成 27 年 9 月)

(7) 研究分担者

高橋 篤史 (TAKAHASHI, Atsushi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号： 50314290

(8) 研究分担者

大野 浩司 (OHNO, Koji)  
大阪大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号： 20252570

(9) 研究分担者

渡邊 健太 (WATANABE, Kenta)  
大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・研究員  
研究者番号： 70582683  
(平成 25 年 4 月～平成 28 年 3 月)

(3) 連携研究者

加藤 和也 (KATO Kazuya)  
シカゴ大学・教授  
研究者番号： 90111450